एस.सी.ई.आर.टी., बिहार द्वारा विकसित

दो वर्षीय सेवाकालीन
डिप्लोमा इन एलिमेन्ट्री एजुकेशन
(दूरस्थ शिक्षा)

गणित का शिक्षणशास्त्र
भाग–1
(प्रथम सत्र)
S1.4

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
(एस.सी.ई.आर.टी.), महेन्द्रू, पटना, बिहार

प्रकाशक
दूरस्थ शिक्षा निदेशालय
राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
(एस.सी.ई.आर.टी.), महेन्द्रू, पटना, (बिहार)

© दूरस्थ शिक्षा निदेशालय, (एस.सी.ई.आर.टी.),बिहार

ISBN	**978-9384709-44-0**
डिप्लोमा इन एलिमेन्ट्री एजुकेशन (दूरस्थ शिक्षा) कार्यक्रम	
सत्र	प्रथम
विषयपत्र	गणित का शिक्षणशास्त्र–1
प्रकाशन	जून, 2016
प्रतियाँ	7000

विश्व बैंक सम्पोषित परियोजना के अन्तर्गत
डी.एल.एड. (ओ.डी.एल.) के साधनसेवियों एवं प्रशिक्षुओं (कार्यरत शिक्षिकाओं–शिक्षकों)
के स्वाध्याय हेतु निःशुल्क उपलब्ध

पठन सामग्री विकास समूह
विषय-पत्र : गणित का शिक्षणशास्त्र-1

दिशाबोध

- श्री संजीवन सिन्हा, निदेशक, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, पटना
- डॉ. सैयद अब्दुल मोईन, विभागाध्यक्ष, अध्यापक शिक्षा विभाग, एस.सी.ई.आर.टी, पटना
- डॉ. प्रमिला मनोहरन, शिक्षा विशेषज्ञ, यूनिसेफ, पटना
- डॉ. ज्ञानदेव मणि त्रिपाठी, प्राचार्य, मैत्रेय कॉलेज ऑफ एजूकेशन एण्ड मैनेजमेन्ट, हाजीपुर (वैशाली)

संपादन

- डॉ० अनिल कुमार तेबतिया, प्राचार्य, डायट, दिलशाद गार्डन, दिल्ली
- डॉ० सत्यवीर सिंह, प्राचार्य, एस.एन.आई कॉलेज पिलाना, उत्तरप्रदेश

लेखन

- डॉ० अनिल कुमार तेबतिया, प्राचार्य, डायट, दिलशाद गार्डन, दिल्ली
- डॉ० सत्यवीर सिंह, प्राचार्य, एस.एन.आई कॉलेज पिलाना, उत्तरप्रदेश
- श्री के. के. ठाकुर, बिहार शिक्षा परियोजना, पटना
- रिजवान रिज़वी, सहायक शिक्षक, उत्क्रमित मध्य विद्यालय, सिलौटा, चांद कैमूर
- डॉ० राकेश कुमार, प्राचार्य, डायट, भागलपुर
- श्री मनोज कुमार झा, उत्क्रमित मध्यविद्यालय, लौरिया नन्दन गढ़, प० चम्पारण
- श्री गोविन्द प्रसाद, बी.आर.सी.सी., चनपटिया, प० चम्पारण
- श्री दिलीप कुमार, सी.आर.सी.सी., मध्य विद्यालय, बुलनी, हैदरपुर, नालंदा

संयोजन

- श्री तेजनारायण प्रसाद, व्याख्याता, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, पटना।

आमुख

हमारे बिहार के विद्यालयों में ऐसे शिक्षकों एवं शिक्षिकाओं की ज़रूरत है जिसके लिए शिक्षण वृत्ति एक स्वाभाविक प्रतिबद्धता हो और जो शिक्षण को एक आनन्ददायी कार्य मानते हों। उन्हें पढ़ाये जाने वाले विषय व पढ़ाने के कौशल तो अच्छी तरह से आते ही हों, साथ ही वह उन बच्चों को भी बेहतर तरीक़े से जानते व समझते हों जिन्हें वे पढ़ा रहे हैं। अतः विभिन्न सामाजिक, सांस्कृतिक एवं आर्थिक पृष्ठभूमि, खासकर उपेक्षित वर्ग से आनेवाले बच्चों के प्रति विद्यालय के शिक्षकों में सजगता एवं संवेदनशीलता होना सबसे जरूरी है, जिसके बिना उन बच्चों को विद्यालयी शिक्षा की प्रक्रिया में शामिल कर पाना असम्भव है। साथ ही, एक शिक्षक या शिक्षिका में लोकतांत्रिक मूल्यों के प्रति लगाव उसे सीखने–सिखाने की प्रक्रिया को रोचक व सहज बनाने में सहायी होता है। बिहार जैसे बहुलतावादी समाज में बेहतर शिक्षा तभी संभव हो सकती है जबकि हम 'समता' व 'बहुलता' की समझ को अपनी शिक्षा प्रक्रिया के केन्द्र में रखें।

बीसवीं सदी के आख़िरी दशक और इस सदी के शुरुआत में पाठ्यक्रम का बदलाव एक गहरा सामाजिक और राजनैतिक सवाल बनकर उभरा है। जब पाठ्यक्रम में बदलाव 'तेज़ी' से हो रहा हो तो 'शिक्षक' में इस संभावना को खोजा जाना लाज़मी है कि वह नयी अकादमिक स्थितियों से सामंजस्य कर सके और ज़रूरत हो तो उनसे मुक़ाबला भी कर सके। उदाहरण के तौर पर, एक संकुचित अवधारणा यह है कि शिक्षक पाठ्यक्रम की बातों को गन्तव्य (बच्चों) तक पहुँचाने वाला एक एजेन्ट मात्र है जो कि बच्चों को पाठ्य–पुस्तकों में लिखी बातों को रटवायेगा व बच्चे उसे परीक्षा में पुनरोत्पादित करेंगे। शिक्षक की इस रूढ़ीगत भूमिका को तत्काल बदले जाने की ज़रूरत है। नवीन पाठ्यचर्या पर आधारित इस विषयपत्र के माध्यम से यह अपेक्षा है कि प्रशिक्षित शिक्षक अपनी नयी भूमिका में बच्चों को उन स्थितियों को आलोचनात्मक तरीके से समझने में मदद करेंगे जिनमें वे रहते हैं। बच्चें विभिन्न माध्यमों (पाठ्यचर्या, पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक, शिक्षक, परिवेश आदि) से दिये जाने वाले 'ज्ञान' को मात्र स्वीकार न करें बल्कि उनपर प्रश्नचिह्न भी लगा सकें।

ऐसी आदर्श शैक्षिक स्थिति का निर्माण एक सक्षम शिक्षक या शिक्षिका के माध्यम से ही हो सकता है, जिसकी तैयारी की आशा इस विषयपत्र के विभिन्न इकाइयों के विषयवस्तु के माध्यम से की गई है। प्रयास यह किया गया है कि प्रस्तुत पठन सामग्री, सरल, तथ्यात्मक रूप से सटीक, विषयवस्तु में निरन्तरता बनाए हुए हो। यथास्थान गतिविधियों के माध्यम से प्रशिक्षुओं को सक्रिय रूप से सहभागिता निभाने का अवसर दिया गया। आशा है आप इस पाठ्यसामग्री के माध्यम से शिक्षा की समकालीन आवश्यकताओं के प्रति संवेदनशील हो सकेंगे।

अंत में, यह बात स्पष्ट करना जरूरी है कि इस पठन सामग्री को आप अंतिम न माने। इसके साथ–साथ, प्रारम्भिक स्तर की पाठ्यपुस्तकों और विभिन्न प्रकार की आई.सी.टी. सामग्रियों को भी अपने अध्ययन का हिस्सा अनिवार्य रूप से बनाएं, तभी आपकी समझ में खुलापन और जिज्ञासा बनी रह पाएगी, अन्यथा आपका विद्यालयी शिक्षण का कार्य नीरस हो जाएगा। इस पठन सामग्री को और संवर्द्धित करने के लिए आपके सुझाव सदैव आमंत्रित हैं।

निदेशक
राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार

विषयवस्तु

इकाई		पृष्ठ संख्या
1	गणित शिक्षा : क्यों और कैसे?	01–15
2	गणित सीखने-सिखाने के विविध आधार	16–39
3	संख्या एवं संख्या संक्रियाएं	40–70
4	भिन्न और दशमलव संख्याएं	71–107
5	ज्यामितीय आकृतियां एवं पैटर्न	108–136
6	मापन और आंकड़े	137–173
7	गणित में सीखने की योजना, संसाधन और आकलन	174–218
	उपयोगी पठन सामग्री की सूची	

आगे दिए गए विभिन्न इकाइयों की समझ को व्यापक बनाने के लिए निम्नलिखित ई–संसाधनों के उपयोग को प्रोत्साहित करें :

- इकाइयों के विषयवस्तु पर निर्मित आई.सी.टी./ऑडियो–विजुअल/एनिमेशन सामग्री।
- प्रारम्भिक स्तर की पाठ्यपुस्तकों पर आधारित डिजिटल सामग्री, जो इकाइयों से सम्बंधित हों।
- इकाइयों के विषयवस्तु से सम्बंधित फिल्म, डॉक्युमेंटरी, प्रेजेन्टेशन, वेब–रिसोर्स, ओपेन रिसोर्स, आदि।

इकाई 1
गणित शिक्षा : क्यों और कैसे?

1.1 परिचय
1.2 सीखने के उद्देश्य
1.3 पूर्व अनुभव
1.4 गणित के बारे में भय, भ्रम और मिथक : सबके लिए गणित
1.5 दैनिक जीवन में गणित : आवश्यकता एवं महत्व
1.5.1 गणित, हमारे चारों और है?
1.5.2 क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है?
1.5.3 मनोरंजन के लिए गणित
1.6 गणित की प्रकृति
1.6.1 तार्किकता
1.6.2 प्रतीकात्मकता
1.6.3 सटीकता
1.6.4 अमूर्त्तता
1.6.5 क्रमिकता
1.6.6 सार्वभौमिकता
1.7 गणितीयकरण
1.8 समेकन
1.9 प्रदत्त कार्य

1.1 परिचय

हम सभी का गणित से रोजमर्रा का वास्ता है। सुबह समय पर उठने में, किसी काम को करने में लगने वाले समय के हिसाब–किताब में यहाँ तक कि सुबह की चाय की चुस्की में भी जाने अनजाने हम इसका इस्तेमाल करते हैं। कुछ लोगों को यह पसंद आती है और इसे करने में उन्हें मजा आता है लेकिन कुछ लोग ऐसे भी है जिन्हें गणित खास पसंद नहीं आती और वह इसे अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं। आपने भी अपने आस–पास ऐसे लोगों को देखा होगा जिन्हें गणित का नाम लेते ही डर लगता है या फिर उन्हें यह कठिन लगता है और कुछ ऐसे लोग भी अवश्य होंगे जो इससे प्यार का भाव रखते हैं। गणित में ऐसी क्या विशेषताएँ हैं कि यह लोगों में अलग–अलग तरह की भावनाएँ पैदा करता है? क्या यह जरूरी है कि हर आदमी इसे सीखे? इस इकाई में हम ऐसे कुछ प्रश्नों पर विचार करेंगे। पहले हम कुछ उदाहरण व उनके विश्लेषण के द्वारा यह समझने की कोशिश करेंगे कि क्या हमारे चारों और गणित है?साथ ही यह भी समझने का प्रयास करेंगे कि क्या सभी बच्चे गणित सीख सकते हैं? हम यह भी जानेंगे कि गणित का उपयोग रोजमर्रा के जीवन में हम किस प्रकार करते हैं, यह कितना जरूरी है, और यह कितना मनोरंजक हो सकता है। हम यह भी देखेगे कि गणित किस प्रकार हमारे सोचने के तरीके को प्रभावित करता है। इस इकाई में ऐसे मत, विचार और तर्क हैं जो गणित के महत्व और स्वरूप के बारे में सोचने को बाध्य करेंगे।

1.2 सीखने के उद्दश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त :

- गणित हमारे दैनिक जीवन का अभिन्न अंग है, इसे समझ सकेंगे।
- गणितीय सोच और इसका कक्षा षिक्षण में विकास को समझ सकेंगे।
- गणित की प्रकृति के विभिन्न आयामों से अवगत हो सकेंगे।
- गणितीयकरण की अवधारणा को जान सकेंगे।

1.3 पूर्व अनुभव

अपनी जरूरत के अनुसार समाज के हर वर्ग/पेशे के लोग गणित जानते हैं तथा किसी न किसी रूप में इसका उपयोग भी करते है।सभी बच्चे किसी न किसी रूप में थोडा बहुत गणित जानते हैं तथा कुछ कुछ संकेतों, संख्याओं, एवं मूलभूत गणितीय संक्रियाओं जैसे जोड़, घटा इत्यादि से परिचित हैं ।

आप अपने परिवेश से इस बात के काई दो उदाहरण दें जो यह साबित करें कि अपनी जरूरत के अनुसार समाज के हर वर्ग/पेशे के लोग गणित जानते हैं तथा इसका उपयोग भी करते हैं ।

जब आप इस पर विचार कर रहे होंगे तो आप देखेंगे कि दर्जी, राज–मिस्त्री, रसोइया इत्यादि अपने दैनिक कार्यों में गणित का भरपूर प्रयोग करते हैं, ये लोग विद्यालयी गणित के अनुसार तो सूत्रोंका इस्तेमाल नहीं कर रहे होते हैं, पर फिर भी अपने ही तरीके से बड़ी तेजी से और प्रभावपूर्ण ढंग से अपने कार्यों को अंजाम दे रहे होते हैं, इनके पास अपने सूत्र हैं और अपनी कार्य पद्धति भी है।

आपकी कक्षा में जो बच्चे गणित विषय में आपकी अपेक्षा के अनुसार नहीं सीख पा रहे हैं, उनके बारे में ये जानने की कोशिश करें कि वे गणित से जुड़ी हुई कौन–कौन सी गतिविधियाँ अपने दैनिक जीवन में करते हैं। आप ये पाएँगे कि बच्चे खेलने तथा घर के कार्यों में गणित का उपयोग कर रहे होते हैं। चाहे कबड्डी हो, लूडो हो, या फिर कंचे ही क्यों न हो, इन सभी खेलों में गणित शामिल है। साथ ही, दुकान से कुछ खरीद कर लाना हो, ज्यादा–कम की पहचान करनी हो या पहले–बाद का चुनाव करना हो, इन सारे कामों को बच्चे आसानी से कर पाते हैं। ये बातें इस समझ को आधार दे रही होती हैं कि मूलभूत गणितीय क्षमताएँ सभी बच्चों में मौजूद होती हैं।

1.4 गणित के बारे में भय, भ्रम और मिथक : सबके लिए गणित

चलिए इस बात पर विचार करें कि विषय गणित के बारे में हमारा क्या नजरिया है? हम पाते हैं कि कुछ लोग विषय गणित को बहुत पसंद करते हैं, उन्हें गणित करने में बड़ मजा आता है। परंतु कुछ लोगों को गणित खास पसंद नहीं आता है, वे लोग गणित को एक अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं। उनके अनुभव बड़े कड़वे हैं और वो गणित से दूर भागने लगते हैं। गणित में किसी को संख्या का डर, किसी को अंकगणित का डर, किसी को बीजगणित का और किसी को रेखागणित का डर सताता है। गणित के परीक्षा में किसी को सर दूखने लगता है, हथेली पसीने से भीग जाती है, दिल जोर–जोर से धड़कने लगता है।

आखिर दूसरे विषय के तुलना में गणित से इतना डर कैसे हो गया? क्या गणित से डरने वाले ये सोचते हैं कि गणित में उत्तर या तो सही होता है या गलत और गणित में इधर–उधर लिखने की कोई गुंजाइश नहीं होती? क्या शिक्षक गणित के प्रति अपना डर दूसरों पर थोपते हैं? इसलिए जो शिक्षक खुद गणित से डरते हैं तो परीक्षार्थी भी डरेंगे। इसी डर के कारण शिक्षार्थियों के गणित के प्रदर्शन में

कमी आती है। अगर एक बार गणित के प्रति डर का बीज शिक्षार्थियों में बो दिया जाता है तो समय के साथ–साथ वो विशाल वृक्ष की तरह बन जाता है। गणित के प्रति शिक्षार्थियों का नकारात्मक सोच उनके मन में गणित के प्रति डर डालता है। इस डर से शिक्षार्थी बाहर नहीं निकल पाता है और उनके प्रदर्शन में कमी आती जाती है।

आइए अब गणित में कुछ मिथक के बारे में बातें करते हैं:–

i. लड़कियाँ, शारीरिक और मानसिक रूप से गणित के प्रतीकों को, अमूर्त अवधारणाओं को नहीं समझ सकती।
ii. गणित तार्किक होता है, लड़कियाँ नहीं।
iii. लड़कियों को गणित पढ़ाना समय की बरबादी है जब वो शादियाँ कर रही हैं।
iv. कुछ खुशकिस्मत लोग ही पैदा होते हैं जिनमें गणित करने की क्षमता होती है।
v. गणित में केवल एक ही हल हाते हैं और यही गणित का लक्ष्य है।
vi. गणित जो जानते हैं वो लोग किसी भी प्रश्न का उत्तर तुरंत दे सकते हैं।
vii. गणित की साक्षरता जरूरी नहीं है।
viii. गणित सिर्फ उनके लिए है जिनको साईंटिफिक कैरियर चाहिए।
ix. गणित केवल तेज बच्चों के लिए होता है।

क्या आप उपर दिये गये मिथकों से सहमत हैं? आप देख रहे हैं कि लड़कियाँ हर क्षेत्र में आगे बढ़ रही है। ऐसा कुछ नहीं है कि तेज बच्चे और खुशकिस्मत बच्चे ही गणित सीख सकते हैं। गणित सबके लिए है। एक सब्जी बेचने वाला जो पढ़ा लिखा नहीं है वो भी अपने काम में गणित का बखुबी इस्तेमाल करता है। आपने सीखा भी है कि गणित हमारे चारों ओर है, हर कोई गणित आसानी से सीख सकता है।

जरूरत इस बात की है और हमारा कर्त्तव्य भी है कि हम उपर दिये गये मिथकों को और गणित के प्रति डर को शिक्षार्थियों के मन से निकालें।

इसके लिए शिक्षार्थी का वर्ग कक्ष सबसे उपयुक्त जगह है जहाँ हम गणित के प्रति उनके मन से डर निकाल सकते हैं और मिथकों को तोड़ सकते हैं और उनके गणित के प्रति सकारात्मक सोच डाल सकते हैं।

1.5 दैनिक जीवन में गणित की आवश्यकता एवं महत्व

क्या आपने कभी सोचा है कि आखिर गणित के प्रश्नों को हल करने के मायने क्या हैं? अधिकतर लोगों के लिए मात्र संख्याओं के साथ गणना करना भर ही गणित हैक्या गणित का दायरा इतना ही सीमित है?

घुटनों के बल चलती बच्ची को जब कोई पुकार कर बुलाता है तो वह कम दूरी वाले रास्ते का चयन कर आवाज़ की और चलती है।

हर बच्ची, बड़ा–छोटा, पास–दूर और न जाने क्या–क्या जाने/अनजाने सीख जाती है। बहुत से कार्य जो वह करती है उनमें वह गणित की कई अवधारणाओं का इस्तेमाल करती है। यह संभव है की उसकी शब्दावली औपचारिक गणित की न हो पर उसे यह सब करने में अडचन नहीं आती।

इसे करें

अपने आस–पास तीन या चार साल के एक बच्चे की दिनचर्या को देखे और पता लगायें कि वह कहाँ–कहाँ गणित का इस्तेमाल करता है? (अलग–अलग परिवेश व अलग–अलग बच्चों के संदर्भ में उदाहरणों की विभिन्नता हो सकती है।)

आप जब यह पता लगाने लगेगे तो हो सकता है आपकी फहरिस्त काफी लम्बी बन पड़े।रिमझिम ने अपने पड़ोस के एक 4–5 साल के बच्चे की रोजमर्रा में इस्तेमाल गणित को कुछ इस प्रकार से सूचीबद्ध किया–

(1) वह जानता है, कौन सी चीज़/वस्तु कम है कौन सी ज्यादा है।
(2) अलग–अलग तरह की आकृतियों को पहचानता हैं जैसे स्लेट जैसी आकृति, गोलाकार आकृति, इत्यादि।
(3) सामान्यतः 4 से 5 तक वस्तुओं की गिनती भी कर लेता है।
(4) रुपये–पैसे का थोड़ा बहुत इस्तेमाल आता है।

प्रश्न : इस सूची को और बढ़ाइए। गणित के अलग–अलग क्षेत्रों से उदाहरण चुन कर इसमें जोड़े।

1.5.1 गणित, हमारे चारों और है

सुबह की पहली चाय बनाते समय भी आप गणित का प्रयोग करते हैं। क्या आप इससे सहमत है?

एक बढ़ई जो मेज़ बनाता है, क्या वह अपने काम में गणित का उपयोग करता है? दर्जी, ग्वाला, सब्जी बेचने वाला, नल ठीक करने वाला या किसान भी क्या किसी रूप में गणित का उपयोग करते हैं?

रेल या बस में यात्रा करते समय, अपनी गाड़ी चलाते समय,बच्चों की फीस जमा करने में भी हम गणित का प्रयोग करते हैं। खाना बनाना, उपग्रह को अंतरिक्ष में भेजना, इमारतें और पुल बनाना आदि कोई भी काम क्या गणित के प्रयोग के बिना किया जाता है?

इसीतरह खेलों और गणित के बारे में आपका क्या विचार है? कबड्डी की एक टीम के कप्तान ने कहा,''हमारी टीम को विपक्षी खिलाड़ी को घेरना आता है।'' इसी प्रकार क्रिकेट के एक कप्तान ने कहा,''यदि क्षेत्र रक्षकों को गेंदबाज़ी के अनुसार मैदान में ठीक से खड़ा कर दे तो समझों आधा काम हो गया।'' फील्ड जमाने के लिए खेल की और स्थान के साथ संबंध की समझ होनी जरूरी है।

फुटबॉल, बास्केटबॉल, हॉकी आदि खेलों में भी जगह को इस्तेमाल करने की सहज जानकारी चाहिए। इनडोर खेलों में भी जीत की योजना क्रम में सोचकर बनानी होती है। जैसे शतरंज में आपको दूसरे खिलाड़ी द्वारा चली जा सकने वाली संभावित चालों के बारे में निरंतर ही सोचते रहना पड़ता है। इसके कौन से खाने से कौन से तक पहुँचेंगे, किस दिशा में मौहरा चलेगा का ध्यान रखना होता है। लूडो, कैरम बोर्ड, व्यापार, चौपड़ और अन्य कई खेलों में भी ऐसी कई बातों का ध्यान रखना पड़ता है।

प्रश्न : भीतर और बाहर खेले जाने वाले एक–एक खेल के बारे में सोचिए जो आप या आपके बच्चे खेलते हैं। बताइए इन खेलों में गणित का इस्तेमाल किस तरह होता है? (कोशिश करके गणित के अलग–अलग पहलू ढूँढें।)

प्रश्न : ललिता कहती है कि घर से स्कूल आने में भी मैं गणित का इस्तेमाल करती हूँ।वह इसमें कहाँ–कहाँ गणित का इस्तेमाल करती होगी?

लता अपने घर के लिए राशन का समान लेने जा रही है। सोचिए इसके लिए उसे कौन–से गणित की जरूरत पड़ेगी? राशन का समान व उनके मोल–भाव की जरूरत होगी। इसलिए उसे कई प्रश्नों का जवाब सोचना होगा– जैसे–

1. उसे क्या–क्या सामान लाना है?

2. कौनसी सामग्री घर में ज्यादा इस्तेमाल होती है और कौनसी कम?
3. कौनसा सामान किस तौल अथवा माप में लाना है?
4. कौनसी सामग्री किस भाव आती है?
5. कितना बड़ा थैला व तरल पदार्थ के लिए कैसा बरतन ले जाना होगा?
6. क्या वह जितना समान लाना चाहती है उसे उठा पायेगी अथवा नहीं? और समान को थैले में ठीक से जमाने के लिए भी उसे जगह की समझ और साथ ही साथ यह भी सोचना होगा कि किस सामग्री को नीचे रखा जा सकता है और किसे नहीं?

इन सब प्रश्नों के उत्तर के लिए लता को गणित का ज्ञान होना जरूरी है उदाहरण के लिए प्रश्न 5 के उत्तर के लिए उसे आयतन एवं धारिता की कुछ समझ होनी चाहिए। प्रश्न 3 के उत्तर के लिए उसे वस्तुओं के मोल व उसके अनुसार हिसाब लगाना आना चाहिए।

इसी प्रकार पँखुड़ी ने अपने घर के सामने वाले पेड़ पर झूला लगाकर उसपर झूलने की सोची। सोचिए इसके लिए उसने किस–किस तरह के गणितीय प्रश्नों के बारे में जाने–अनजाने सोचा होगा? पहले आप खुद से विचार कीजिए फिर नीचे दिए गए प्रश्नों से मिलाकर देखिए। जैसे–

1. डाल कितनी मजबूत और ऊँची होनी चाहिए?
2. जब झूले में झूलेंगे तो अन्य डाल अथवा कोई और रूकावट तो उत्पन्न नहीं होगी?
3. रस्सी कितनी लम्बी होनी चाहिए? क्या रस्सी की लम्बाई का डाल की ऊँचाई से कोई संबंध है?
4. रस्सी कितनी मोटी होनी चाहिए?
5. पट्टे का आकार व एक साथ उस पर कितने बच्चे झूल सकते है? इत्यादि।

इन सब प्रश्नों में स्थानीय समझ व ज्यामिति के कौन–कौन से पहलु छिपे हैं?

झूले को डालने और इस्तेमाल करने में पंखुड़ी अपने अनुभवों से बहुत सी ऐसी राशियों का अनुमान लगाती है जो गणितीय तरीके से परिकलित की जाती हैं। वहअनुमान लगाती है, उनकी जाँच करती है और यह तय करती है कि उन्हें इस्तेमाल किया जाये या फिर नये अनुमान लगाये जायें।

प्रश्न : आप भी अपने आस–पास से 3 अन्य उदाहरण लेकर सोचिए और पता लगाइए उसमें गणित कहाँ–कहाँ निहित है और उनका सविस्तार विश्लेषण कीजिए।

1.5.2 क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है?

इसका उत्तर ''हाँ'' है और ''नहीं'' भी। उन लोगों के लिए, जो गणित को तलाशते हैं और जो जानते हैं कि इसे कहाँ तलाशना है, उत्तर ''हाँ'' है। जो लोग इसे नहीं तलाशते हैं, उनके लिए गणित केवल वही है जो स्कूल में करते हैं, जिसका वास्तविक दुनिया से कोई संबंध नहीं होता है।

आइए, इसे समझने के लिए रोटी बनाने का उदाहरण लें। मेरा दोस्त मोईन कहता है कि रोटी पकाने में रसायन विज्ञान का इस्तेमाल होता है। इसका क्या मतलब है? उसके अनुसार, जब रोटी पकाई जा रही होती है तो ऐसे रासायनिक परिवर्तन होते दिखते हैं जैसे उसने विद्यालय में रसायन विज्ञान की कक्षा में पढ़े थे।

लेकिन मेरी एक दूसरी दोस्त कहती है कि वह जब वह चपाती बनती देखती है तो उसकी रूचि ज्यादा उन आकारों व आकृतियों में होती है जो बेलते वक्त आटे से बनती है। उसे बेलन की चाल और इन आकारों के बीच संबंध ढूँढ़ना भी अच्छा लगता है। इसलिए जिस प्रक्रिया में उसे गणित नजर आता है बिलकुल उसी प्रक्रिया में मोईन को रसायन विज्ञान नज़र आता है।

यह उदाहरण बताता है कि किसी भी कार्य घटना या तथ्य को अलग–अलग नज़रियों से देखा और समझा जा सकता है। यदि हम उसमें शामिल गणित की तलाश करेंगे, तो वह हमें अवश्य मिलेगा।

मीरा ने मीटर पैमाने को देखकर कहा कि उसके तीन कदमों की माप 1 मीटर के बराबर है और इसी अनुमान से वह अपने घर से स्कूल की दूरी की नाप मीटर में बताती थी–जबकि क्षेया ने कहा अरे यह तो धातु की बनी है और बहुत मजबूत है।

जिया को अपने घर में समान इस प्रकार जमाना था, जिससे कि उनके कमरे खुले–खुले लगें।रमेश को आलमारी घर के अंदर ले जानी थीं तो उसे सोचना पडा किस दरवाजे से ले जाए, सीधी ले जाए या आड़ी करके, पलंग पर कौन सी चादर ठीक रहेगी, जो पूरा ढक भी दें और लटक कर फर्श तक भी न पहुँचे। क्या इस सबमें स्थानिक समझ का उपयोग हो रहा है?सोचिए।

यदि एक बार हम अपनी ''गणितीय आँखों'' को खोल लें और हम देखना शुरू कर दें तो हम लगभग हर चीज़ में गणित देख सकते हैं– चाहे वह कोई गीत हो, कोई कहानी की किताब हो, भिनभिनाती हुई मक्खी का पथ हो, माचिस के डिब्बे का आकार और इसकी सतहों की संख्या हो, इन सतहों को ढकने के लिए जरूरी काग़ज का अनुपात हो, घर में बिजली के तार हों, पत्तियों के आकार हों, आदि–आदि।

बच्चों की सभी गतिविधियाँ और अनुभव भी गणित से ओत–प्रोत होते हैं। **इन अनुभवों को उन गणितीय विचारों और संकल्पनाओं से जोड़ना चाहिए जो हम उन्हें सिखाते हैं।** तभी ये विचार उन्हें उपयोगी लगेंगे और वे इन्हें आसानी से समझ सकेंगे।

प्रश्न : निम्नलिखित गणितीय संकल्पनाओं से संबंधित बच्चों के जीवन से कम से कम एक–एक अनुभव बताइए।
जोड़, आयतन, सममिति, प्रायिकता।

अब तक आप यह जान गए होंगे कि आप जाने–अंजाने गणित का कितना इस्तेमाल करते हैं। निम्नलिखित उपभाग से शायद आपको कुछ अंदाज़ा हो जाए कि हम मनोरंजन के लिए गणित का कैसे प्रयोग कर सकते हैं।

1.5.3 मनोरंजन के लिए गणित

अक्सर जब खाली समय होता है तो मैं गणित के मज़ेदार प्रश्न हल करने की कोशिश करती हूँ। कभी मेरे दोस्त और मैं प्रश्न बनाते है और कभी ये हमें मनोरंजक पुस्तकों में मिल जाते हैं। आप भी इन प्रश्नों को हल करने की कोशिश क्यों नहीं करते? इन्हें आप अपने खाली समय में कर सकते हैं। शायद आपको भी मजा आए।

1. दस–दस सिक्कों की दस ढेरियाँ रखी है, सभी ढेरियों में रखे सिक्के 10–10 ग्राम के है, सिवाये एक को छोड़कर जिसमें सिक्के 9–9 ग्राम के है। यदि आपके पास एक ऐसा तराजु है जिससे आप केवल एक बार ही तौल सकते हो, तो आप कैसे पता लगाओंगे कि किस ढेरी के सिक्के 1 ग्राम कम तौल के है।

2. सोना कहाँ है– मेज पर रखे तीन डिब्बे में से एक में सोना है बाकी खाली है। हर डिब्बे पर एक संदेश लिखा है। इनमें से एक ही संदेश सच है, बाकी के दो झूठ है। पहले डिब्बे पर लिखा है ''सोना यहाँ नहीं है''। दूसरे डिब्बे पर लिखा है ''सोना यहाँ नहीं है''। तीसरे डिब्बे पर लिखा है ''सोना पहले डिब्बे में है''। तो आप सोचो सोना किस डिब्बे में है।

3. किसी गाँव में केवल एक नाई है। वह गांव के उन सब आदमियों की दाढ़ी बनाता है जो खुद अपनी दाढ़ी नहीं बनाते हैं। क्या नाई अपनी दाढ़ी बनाएगा?

4. मैं कुछ दिन पहले एक सम्मेलन में गयी थी। वहाँ किसी ने एक महिला से पूछा, ''आपकी उम्र क्या है?'' वह शायद बताना नहीं चाहती थी इसलिए मुस्कुराते हुए बोली– ''आज मेरी उम्र है– अब से चार साल बाद मेरी उम्र गुणा तीन उसमें से घटा पाँच साल पहले मेरी उम्र गुणा तीन।'' हम तो चक्कर खा गए पर क्या आप बता सकते हैं कि उनकी क्या उम्र होगी?

6. सीताराम अपने बाग में लगाने के लिए 25 पौधे लेकर आया। उसने अपने माली गंगाराम से कहा ये पौधे 12 कतारों में इस तरह से लगाओ कि हर कतार में 5 पौधे हो। गंगाराम सोच में पड़ गया कि क्या करें? क्या आप उसकी मदद कर सकते हो।

प्रश्न : बच्चों के लिए ऐसी तीन प्रश्न–पहेलियाँ बनाइए जिनसे उन्हें यह महसूस करने में सहायता मिले कि ''गणित मज़ेदार है''। इन्हें अपने आसपास के बच्चों पर आज़माइए। पता लगाइए कि कौन सी उन्हें अच्छी लगी और क्यों?

अभी तक हमने दैनिक जीवन में गणित की उपयोगिता व इसके मजेदार होने के बारे में बातचीत की। आप भी दो–दो नए उदाहरण सोचें जिससे गणित के मजेदार होने व दैनिक जीवन में उपयोग की झलक मिलती हो।

1.6 गणित की प्रकृति

आप बच्चों को गणित पढ़ाते हैं। आपने महसूस किया होगा कि सभी विषयों का अपना एक अलग स्थान होता है, गणित का भी एक अलग स्थान है, क्या आप भी ऐसा सोचतें है? इस प्रकार की सोच के क्या कारण है? आप सोच रहे होंगे कि प्रत्येक व्यक्ति का अपना स्वभाव होता है, जिसके कारण वह अन्य व्यक्तियों से भिन्न होता है। ठीक इसी प्रकार प्रत्येक विषय की अपनी प्रकृति होती है जिसके कारण सभी का अलग स्थान है। गणित विषय का भी अपनी प्रकृति के कारण एक अलग स्थान है।

गणित की प्रकृति जानने के लिए आपको गणित के महत्वपूर्ण गुणों को समझना होगा जिनके कारण गणित को सभी क्षेत्रों में विशेष स्थान प्राप्त है। गणित की प्रकृति, गणित शिक्षण और अधिगम विधियों को बहुत ज्यादा प्रभावित करती है। अतः प्रारंभिक विद्यालय के शिक्षकों को गणित की प्रकृति के बारे जानने की आवश्यकता होती है। आइए, गणित की प्रकृति के बारे में चर्चा करें –

1.6.1 तार्किकता

गणित की एक मुख्य प्रकृति है इसकी तार्किकता। गणित क्रमबद्ध रूप से तथा तार्किकता के कई चरणों के माध्यम से समस्या का समाधान करता है।

उदाहरण –निम्न गणितीय समस्या पर विचार करें।

1 5 9 13 17...............?

यह इस श्रेणी में अंक 17 के पश्चात् कौन सा अंक आयेगा ? यदि समस्या का विश्लेषण क्रमबद्ध और तार्किक ढंग से किया जाये तो 17 के पश्चात् 21 आयेगा क्यों कि बाद में आने वाला अंक अपने पूर्व अंक से 4 अधिक है अर्थात $17 + 4 = 21$, गणित सत्यता को तर्क के द्वारा स्थापित करता है। गणितीय कथनों का प्रमाण स्वीकृत नियमों, परिभाषाओं और अवधारणाओं का उयोग करके क्रमिक तार्किक पक्षों से बना होता है ।

निम्नांकित उदाहरण पर धयानदें :–

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 29, 35, 43, 55 और 2013 सभी विषम संख्याएँ हैं इनमें से किन्हीं दो विषम संख्याओं को जोड़ें और पता लगायें कि क्या योगफल सम संख्या है या विषम संख्या? यहाँ आप देखते हैं कि

1 + 3 = 4   4 एक सम संख्या है ।

5 + 11= 14   14 एक सम संख्या है ।

17 + 29 = 46   46 एक सम संख्या है ।

29 + 43 = 72   72 एक सम संख्या है ।

1 + 2013 = 2014   2014 एक सम संख्या है ।

और इसी तरह अन्य विषम संख्यओं के योग पर सम संख्यायें ही प्राप्त होती है। अपने विद्यार्थियों को किन्हीं दो विषम संख्याओं को जोड़ने के लिए कहें तो प्रत्येक स्थिति में उन्हें योगफल सम संख्या ही प्राप्त होगी। इस प्रकार के तर्क को आगमनात्मक तर्क कहते हैं।

गणित में कई स्थितियों में गणितीय निष्कर्ष निकालने के लिए आगमन तर्क का उपयोग करते है। आइए, ज्यामिति के एक उदाहरण पर धयान दें। एक त्रिभुज के एक कोण की माप 70 अंश और दूसरे कोण की माप 80 अंश है तो तीसरे कोण की माप क्या होगी ? यदि आप इस त्रिभुज की रचना करके तीसरे कोण की माप करते हैं तो आप इसकी माप 30 अंश पायोंगे। इसी प्रकार के कई त्रिभुजों की रचना करके अनेक कोणों की माप ज्ञात करें। आप पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में तीनों कोणों का योगफल 180 अंश होता है ।

यदि यह निष्कर्ष पहली स्थिति के लिए, द्वितीय स्थिति के लिए, तृतीय स्थिति के लिए सत्य है तथा अन्य इसी प्रकार की स्थितियों के लिए भी सत्य है, तो हम उचित रूप से निष्कर्ष निकाल सकते हैं ंकि किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180 अंश होता है ।

अब, निम्नांकित गणितीय कथन का अवलोकन करें :–

'दो विषम संख्याओं का योगफल एक समसंख्या होता है'। इस कथन को केवल अनुभूत अवलोकन के आधाार पर प्रमाणित नहीं किया जा सकता है। अनेक उदाहरणें और उनका परीक्षण करके ही यह कह सकते हैं कि कथन सत्य या असत्य। यदि विषम संख्या और जोड़ की जानकारी है, तो इस कथन को गणितीय ढंग से ले सकते हैं।

किसी भी विषम संख्या को 2क + 1 के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ पर क एक प्राकृत संख्या है। दो विषम संख्याएँ 2क + 1 और 2ख + 1 जहाँ क व ख प्राकृत संख्याएँ हैं।

इन दोनों विषम संख्याओं का योगफल = 2 क + 1 + 2 ख +1

= 2 (क + ख) + 2

= 2 (क + ख + 1)

= 2 ग है,   जहां (क + ख + 1)एक प्राकृत संख्या है।

यहाँ पर संख्या 2ग, 2 से विभाजित है। अतः 2ग एक सम संख्या है।

इस प्रकार से दो विषम संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है। इस प्रकार का तर्क जिसमें ज्ञात परिणामों, परिभाषाओं, नियमों का उपयोग करके किसी कथन की सत्यता की जाँच की जाती है, उसे निगमित तर्क कहते हैं।

प्रश्न :

- सिद्ध करें कि दो सम संख्याओं का योगफल एक सम संख्या है ।
- विषम संख्या और सम संख्या का योगफल एक विषम संख्या है ।
- गणित की अपनी पाठ्यपुस्तक का अध्ययन करें और पाँच ऐसे उदाहरण ढूँढें जहाँ पर आगमन तर्क का उपयोग किया गया है ।

उपरोक्त चर्चा से यह निष्कर्ष निकलता है कि गणित एक तर्क का रूप है। गणित की एक महत्वपूर्ण तार्किक प्रक्रिया होती है। समस्याओं में क्या दिया है? तथा क्या सिद्ध करना है?' में तोड़कर हल करना एक तार्किक प्रक्रिया के अलावा और कुछ नहीं होता है ?

1.6.2 प्रतीकात्मकता

गणित के अपने संकेत और चिह्न होते हैं। गणित में समस्याओं और समाधानों को चिह्नों या संकेतों के माध्यम से निरूपित किया जाता है। निम्न कथन पर धयानदें :–

कथन – चालीस को जब बीस से गुणा किया जाता है तो आठ सौ प्राप्त होता है।

इस कथन को गणितीय चिह्न के प्रयोग द्वारा निम्न प्रकार से लिख सकते हैं –

40 X 20 = 800

यहाँ देखा जा सकता है कि चिह्नों के उपयोग करने से गणितीय अभिव्यक्ति संक्षिप्त और स्पष्ट बन जाती है। इन चिह्नों से परिचित रहने पर गणितीय अभिव्यक्ति को चिह्नात्मक रूप में लिख सकते हैं।आप कुछ अन्य चिह्नों से सभी परिचित हैं और दैनिक जीवन में इनका उपयोग सभी लोग करते हैं।

उदाहरण के लिए –

सामान्य कथन	**गणितीय संकेत या निरूपण**
बराबर है	=
जोड़ना	+
घटना	–
सात, चार से बड़ा है	7>4
त्रिभुजाकार	△
प्रतिशत	%

यदि हम कहते हैं कि अनिल ने गणित की परीक्षा में 100 में से 80 अंक प्राप्त किये हैं तो इसे गणितीय रूप में कह सकते हैं कि अनिल ने 80% अंक प्राप्त किये है।गणित के कठिन और अमूर्त

विचारों को चिह्नात्मक रूप में सामान्य संकेतों का उपयोग करते हुए अभिव्यक्त करना तुलनात्मक रूप से समझने और सम्प्रेषण करने में आसान होता है। ये संकेतकों के निकाय गणित को सुदृढ़ता प्रदान करते हैं और हमें यह जानने में सहायता करते हैं कि कोई गणितीय कथन सत्य और प्रमाणिक है या नहीं ?

प्रश्न : कुछ गणितीय चिह्नों की सूची तैयार कीजिए। इनमें से कम्प्यूटर के की–बोर्ड पर कौन कौन से संकेतों का प्रयोग किया जाता है।

1.6.3 सटीकता

सटीकता गणित की महत्वपूर्ण प्रकृति है। सटीकता का अर्थ है ''परिशुद्धता'' और ''सुस्पष्टता''। गणित सटीकता के साथ समस्या का समाधान करता है अर्थात जब एक बार किसी निष्कर्ष पर पहुँच गये तो फिर संदेह की स्थिति नहीं रहती है। उदाहरण के लिए एक टोकरी में चार सेब रखे हुए हैं यदि हम उसमें दो सेब और मिला दे तो कुल सेबों की संख्या कितनी होगी ? निश्चित रूप छः सेब होंगे न तो वह तीन सेब होगा या 8 सेब होगा केवल और केवल 6 ही सेब होंगे। अतः सटीकता गणित का विशेष गुण है।उदाहरण के लिए बेलन की अवधाारणा ली जा सकती है। बेलन की परिभाषा सुस्पष्ट और सटीक है। एक बेलन त्रिआयामी ज्यामितीय आकार का होता है जिसका आधार और ऊपरी तल समतल और वृताकार होता है। यदि कोई वस्तु आपको दी जाये तो आप इन विशेषताओं के आधार पर निश्चित रूप से बता सकते हैं कि यह बेलन है या नहीं ?

क्रियाकलाप :– एक बेलनाकार ठोस लें और उसका निरीक्षण करें कि उसके कितने वक्र पृष्ठ और कितने इसके शीर्ष है।

– बेलन का चित्र कागज पर बनायें

– विभिन्न वस्तु जैसे गिलास, पेंसिल, कद्दू जिसका उपर और नीचे का भाग कटा हुआ हो, बैंगन जिसका ऊपर एवं नीचे का भाग कटा हुआ हो, आइसक्रीम, पेन, माचिस की डिब्बी में जो बेलनाकार नहीं है, उनको पहचान कर अलग करें ।

इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात् आपने महसूस किया होगा कि बेलन की परिभाषा आपको बेलनाकार वस्तु तथा जो बेलनाकार वस्तु नहीं है उनमें अन्तर स्पष्ट करने में सहायता करती है । 'बेलन के क्या विशिष्ट गुण है' यह उसकी परिभाषा से स्पष्ट है। कोई भी व्यक्ति अपने परिवेश की वस्तुओं में से बेलनाकार वस्तुओं को आसानी से पहचान सकता है, क्योंकि बेलन की अवधारणा को सटीकता और सुस्पष्टता के साथ परिभाषित किया गया है । सटीकता गणित की एक महत्वपूर्ण प्रकृति है जो कि सुस्पष्टता और परिशुद्धता से संबंध रखती है और यहाँ पर शंका और अस्पष्टता के लिए कोई भी स्थान नहीं है ।

गणितीय विचार की विशेषता, निष्कर्ष में निश्चितता, शुद्धता और पैनापन से सम्बन्ध रखती है। इस प्रकार के विचारों में सटीकता को स्वीकार किया जाता है और कुछ इसे स्वीकार नहीं करते हैं। गणितज्ञ वह है जो सटीकता को अपने विचारों में जगह देता है।

1.6.4 अमूर्त्तता

गणित की प्रकृति अमूर्त है अर्थात इसे स्थूल या भौतिक जगत में देख या छू नहीं सकते हैं, गणितीय अवधारणाओं की कल्पना की जा सकती है तथा मूर्त रूप में इसकी व्याख्या की जा सकती है। उदाहरण के लिए, कथन 4 + 4= ? एक गणितीय भाषा में निरूपित समस्या है लेकिन यह अमूर्त समस्या है

अर्थात 4 क्या है ? क्या इसका अस्तित्व भौतिक जगत में है ? क्या आप 4 को छू कर सकते है या देख सकते है ? उत्तर है नहीं ......4 केवल एक चिह्न है।

इसी तरह ' +' क्या है ? 4 और 4 के मध्य '+' का एक चिन्ह है जो स्थूल रूप में उपलब्ध नहीं है जो कि योग को निरूपित करता है। यह एक अमूर्त विषय है। इस अमूर्तता को स्थूल चीजों के माध्यम से निरूपित किया जा सकता है अर्थात 4 + 4= ? को हम लिख सकते हैं 4 पेंसिल + 4 पेंसिल = 8 पेंसिल अर्थात आप 4 पेंसिल को देख व स्पर्श कर सकते हैं। 4पेंसिल का अस्तित्व है लेकिन केवल 4 का भौतिक जगत में अस्तित्व नहीं है।

गणित की अवधारणाएं जैसे – संख्या, संक्रियाएं, ज्यामिति इत्यादि के उदाहरण सीधे–सीधे भौतिक जगत में नहीं मिलते। इनकी अवधारणाओं को बताने के लिए ठोस चीजों का उपयोग किया जाता है, अर्थात कोई दो चीज़ बताकर यह कहा जा सकता है कि ये दो हैं तथा इसके लिए लिखित संकेत 2 सिखाया जाता है। यह संकेत कोई और संकेत भी हो सकता है जैसे कि II, TWO, दो इत्यादि। लेकिन इससे दो की अवधारणा न तो प्रभावित होती है ना ही निर्धारित होती है। जब हम दो आम, दो शहर अथवा दो रूपये कहते हैं, जब यदि इनमें से आम, शहर, रूपया इत्यादि को हटाकर जब केवल दो बोलते हैं अथवा सुनकर समझते हैं तो किसी विशेष चीज़ के संदर्भ में दो को ना समझकर इसे एक गणितीय विचार के रूप में समझ रहे होते हैं अर्थात दो का अपना कोई विशिष्ट रूप नहीं होता है। यह दो की अवधारणा की प्रकृति की अमूर्तता है।

1.6.5 क्रमिकता

सामान्यतः गणित में आगे आने वाली अवधारणा की समझ पहले आने वाली अवधारणा पर अत्यधिक निर्भर करती है। अवधारणाओं की इन कड़ियों में सातत्य/निरन्तरता तो बनती ही है साथ–साथ पहली अवधारणा भी आगे के स्तर पर उच्चतर जटिलता के स्तरों के साथ बार–बार आती रहती है।

जैसे कि गिनती सिखाने की प्रक्रिया में योग की संक्रिया स्वतः निहित होती है और इस योग की संक्रिया का एक रूप गुणा भी होता है, फिर योग एवं गुणन मिलकर बंटन की अवधारणा को विकसित करते हैं। इस क्रम में संख्या की समझ के भी जटिल स्तर जुड़ते जाते हैं और फिर योग के भी अगले जटिल स्तर जुड़ते जाते हैं। इस प्रकार जो भी नई अवधारणा इस क्रम में जन्म लेती है, वह अगले स्तर पर और भी जटिल समझ एवं व्यापक अर्थों और संबंधों के साथ बार–बार आती रहती है। इस प्रकार निरन्तरता, स्तर एवं व्यापकता में उत्तरोत्तर बढ़ोत्तरी मिलकर एक सर्पिलाकार संरचना का निर्माण करते हैं। इसी कारण गणित के बारें में यह नियम बाकी विषयों के मुकाबले में ज्यादा मजबूती से लागू होता है। क्योंकि गणित सीखने के लिए अवधारणाओं को एक निर्धारित क्रम में सीखना आवश्यक होता है और क्रम में कोई अवधारणा छोड़ी भी नहीं जाती है।

1.6.6 सार्वभौमिकता

गणित की अवधारणाओं में सार्वभौमिकता का गुण होना, गणित की प्रकृति की विशिष्टता है, अर्थात् समय, स्थान एवं वातावरण का गणितीय अवधारणाओं पर प्रभाव नहीं पड़ता। आइए, इसे ज्ञान के अन्य क्षेत्रों की अवधारणाओं के तुलनात्मक अध्ययन से समझते हैं –

जैसे – क्वथनांक विज्ञान की अवधारणा है। पानी का क्वथनांक (उबलने का तापक्रम) पहाड़ की ऊँचाई पर अलग, धरातल पर अलग एवं गहराई में अलग होता है। इसी तरह देश व स्थान के कारण भाषा में परिवर्तन आता है। स्थान के कारण संस्कृति भी परिवर्तित हो जाती हैं, परन्तु गणितीय अवधारणाओं पर इन सब बातों का कोई असर नहीं पड़ता है जैसे – गुणा की अवधारणा 3 X 5 = 15 पहाड़ पर भी होगी, धरातल भी यही होगी तथा अमेरिका में भी यही होगी। गणितीय अवधारणाओं की समय, स्थान तथा वातावरण के कारण अप्रभावी रहने की प्रवृत्ति इसे सार्वभौमिक बनाती है।

एक अध्यापक के रूप में गणित सीखनेसिखाने में आपको अपने बच्चो में इस प्रकार के विशेष गुण विकसित करने के लिए ध्यान केन्द्रित करना होगा। गणित बच्चो में सटीक तर्कशक्ति, सोच और मूल्यांकन करने की योग्यताओं को विकसित करने में सहायता करता है। गणित की तुलना अन्य विषयों के साथ करने पर पायेंगे कि उन विषयों में उत्तर तथ्यों का अनुमान लगाकर या प्रत्यक्ष अनुभव के आधार पर लिखा जा सकता है। इस प्रकार उत्तर लिखने में बच्चो के स्वयं के विचार अधिक प्रभावी होते हैं, लेकिन गणित में व्यक्तिगत विचारों और भावनाओं के लिए कोई स्थान नहीं है। गणित अधिगम के दौरान शिक्षार्थी शुद्धता के मूल्यांकन और गुण–विवेचन करना सीखते हैं। वह यह भी सीखता है कि जीवन में समस्याओं को सटीकता के साथ किस प्रकारहल किया जाये और किस प्रकार सटीकता के साथ समस्याओं को परिभाषित किया जाये। गणित शिक्षण अधिगम के दौरान यह गुण शिक्षार्थियों की आदतों में शामिल हो जाता है।

1.7 गणितीयकरण

गणित की समझ, संसार को समझने, महसूस करने, अंतःक्रिया करने और घटनाओं की व्याख्या करने के योग्य बनाती है।

उदाहरण के लिए, यदि आपसे कहा जाए कि –

- आज दिल्ली का तापमान 46 डिग्री सेल्सियस है, तो आप क्या सोचेंगे एवं महसूस करेंगे।
- आज रात राम को 104 डिग्री बुखार हो गया था, ऐसा सुनकर आपके दिमाग में क्या–क्या विचार आते हैं ?
- कल पटना में इतनी तेज आंधी आई कि 1 मीटर से ज्यादा दूर तक देख पाना संभव नही था। यह सुनकर वहां की स्थितियों के बारें मेंआपके दिमाग में क्या–क्या विचार आते हैं ?
- कल जापान में भूकम्प आया। रिक्टर स्केल पर भूकम्प की तीव्रता 7.5 थी। यह सुनकर उस जगह के बारें में आपके दिमाग में क्या–क्या विचार आते हैं ?

उक्त समस्त आंकड़े आपके लिए कई अर्थ पैदा कर सकते हैं क्योंकि आप गणित के जरिए अपनी सोच में एक स्तर प्राप्त कर चुके हैं, गणित की यह समझ इन जानकारियों के मिलते ही सक्रिय होती है और आप विशिष्ट व्याख्या और अनुभूति कर पाते हैं।

विद्यालयी गणित शिक्षण का उद्देश्य बच्चों की गणितीय दक्षता का विकास करना है। इसके दो लक्ष्य हैं– सीमित लक्ष्य और उच्च लक्ष्य। संख्याएँ और संख्याओं पर की जानेवाली संक्रियाएँ, माप, दशमलव, प्रतिशत आदि सीमित लक्ष्य के अन्तर्गत आते हैं। उससे उच्च लक्ष्य है बच्चों के साधनों को विकसित करना ताकि वह गणितीय ढंग से सोच सके, तर्क कर सके, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकाल सकें

और अंततः अमूर्त को समझ सकें। इसके अन्तर्गत समस्याओं को बनाना और समस्याओं का हल ढुंढने की क्षमता का विकास करना है।

वर्तमान में गणितीय शिक्षण प्रक्रिया को ध्यान से अवलोकन करें तो आप पायेंगे कि बच्चे यांत्रिक रूप से गिनती की क्रिया करते हैं तथा संख्याओं पर की जाने वाली संक्रियाएँ अक्सर अभ्यास आधारित होती है। उसके पीछे सिद्धान्त को बच्चे शायद ही समझते हैं।गणितीय समस्याओं का हल बच्चे तर्क पूर्ण ढंग से नहीं दे पाते हैं।अक्सर गणित शिक्षण बच्चों को आकर्षित नहीं करता है।

गतिविधि 1: दो बच्चों को गणित में जोड़ का एक सवाल दिया गया जैसे– 683 और 35 को जोड़ें।

अब एक बच्चे ने एल्गोरिद्म विधि का अनुसरण किया:–

683 + 35 = 718

या 683
 + 35
 718

तथा दूसरे बच्चे ने दोनों संख्याओं को विस्तारित करके जोड़ किया –

683 = 600 + 80 + 3

35 = 30 + 5

अब, 683 + 35 = 600 + 80 + 3 + 30 + 5

= 600 + 80 + 20 + 10 + 8

= 600 + 100 + 10 + 8

= 700 + 18

= 718

पहले बच्चे से सवाल करने पर–

- 3 के नीचे 5 क्यों रखा गया?
- 8 के नीचे 3 क्यों रख गया?

8 और 3 को जोड़ने पर 11 के लिए 1 को दूसरे के स्थान पर तथा 1 को 6 में जोड़ते हैं। इसके पीछे क्या तर्क है? ऐसा हम क्यों करते हैं? यदि उपर्युक्त सवालों के उत्तर सही–सही देता है, तर्कपूर्ण ढंग से देता है, इकाई, दहाई, सैकड़ा समझ कर देता है तो समझा जायगा कि बच्चे मे गणितीय सोच विकसित हो गई है।

दूसरे बच्चे से सवाल करते हैं–

विस्तारित रूप में संख्या को उपर्युक्त ढंग से लिखा गया?

अगर बच्चा बताता है कि इसको खण्डित करने का आधार इकाई, दहाई, सैकड़ा आदि है एवं 8 दहाई में हो (02) दहाई या मिलाने से सैकड़ा बन जाता है तो समझा जाएगा कि बच्चे में इकाई, दहाई और

सैकाड़े की समझ हो गई है और वह भी जानता है कि 8 दहाई में 2 दहाई को मिलाने से सैंकड़ा बन जाएगा। इससे स्पष्ट होगा कि बच्चा तार्किक ढंग से सोच सकता है।

इस दोनों उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि बच्चा जोड़ की समस्या का गणितीय संक्रिया कर सकता है। उपर्युक्त उदाहरणों से गणितीयकरण क्षमताओं के विकास से संबन्धित चरण खुलते हैं–

- समस्या समाधान
- समाधान के लिए सवाल को समझने का प्रयास किया गया
- संख्याओं का विश्लेषण किया गया
- अनुमान लगाया गया
- उसके पीछे के तर्क प्रस्तुत किये गये और अन्त में निष्कर्ष रूप में योगफल दिया गया।

आइए, एक अन्य उदाहरण लें।

बच्चे परिवेश से बहुत–कुछ अनुभव करते हैं, सीखते हैं जिसके आधार पर वे अनुमान लगाते हैं, निर्णय लेते हैं, तर्क के आधार पर निष्कर्ष निकालते हैं, अमूर्त्तिकरण की प्रक्रिया करते हैं, जैसे मान लीजिए कि एक परिवार में एक लड़का, हर्ष, एक उसकी बहन, रम्या, माँ, पिता, दादा एवं दादी हैं। उस परिवार में हर्ष देखता है कि उसकी माँ प्रत्येक दिन रात के खाने में सब्जी के अलावा 20 रोटियाँ बनाती है जिसमें एक रोटी गाय को तथा एक रोटी बिल्ली को दी जाती है। हर्ष और रम्या दो–दो रोटियाँ खाते हैं, जबकि उसके माँ और पिताजी चार–चार रोटियाँ खाते हैं, और दादा दादी क्रमशः तीन–तीन रोटियाँ खाते हैं। हर्ष परिवार में रात्रि के भोजन के लिए बनने वाली रोटियों की संख्या औसतन प्रति व्यक्ति तीन है। यदि दूसरे दिन आने वाली अतिथियों की संख्या 3 हो तो इसके आधार पर अतिरिक्त रोटियों की संख्या का अनुमान हर्ष कर सकता है। इस प्रकार इस स्थिति से औसत की जानकारी, अनुमान लगाना, आटा की मात्रा, समय, श्रम, आदि के अनुमान लगाये जा सकते हैं। यह गणितीयकरण का एक उदाहरण है।

आइए, एक और उदाहरण लें। एक कक्षा में 30 बच्चे हैं जिन्हें एक पंक्ति में खड़ा किया गया है। पहले बच्चे को कुछ कंचे दिये जाते हैं। दूसरे बच्चे को उससे एक अधिक कंचा तथा तीसरे बच्चे को दूसरे से एक अधिक कन्चा दिया जाता है। इस प्रकार कक्षा के सभी बच्चों के बीच कंचे बाँटे जाते हैं। अगर पहले बच्चे को पाँच कंचे दिये जाएँ तो तीसरे बच्चे को कितने कंचे मिलेंगे। इसी प्रकार तीसवें बच्चे को कितने कंचे मिलेंगे। अगर पहले बच्चे को दस कंचे दिए जाएँ, तो तीसवें बच्चे को कितने कंचे मिलेंगे।

1.8 समेकन

इस इकाई में हमने जाना कि गणित जीवन की सभी क्रियाओं में सम्मिलित है। गणित सीखने सिखाने के लिए गणित की प्रकृति को जानना जरूरी है क्योंकि प्रभावी शिक्षण के नहीं होने से बच्चो में गणित को लेकर अरूचि, भय तथा भ्रम पैदा होता है। गणितीय अवधारणाओं को बच्चो को यांत्रिक ढंग से सिखाने के बजाय उनके परिवेश तथा रोजमर्रा के कार्यों से जोड़कर सिखाया जाना चाहिए। इसलिए आवश्यकता है कि बच्चे की समझ विकसित करने के लिए गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं दोनों का विकास आवश्यक है तथा गणित शिक्षण में सरल एवं समझने योग्य भाषा का प्रयोग किया जाना चाहिए। बच्चे का गणितीयकरण किया जाना ही गणित शिक्षण का मुख्य उददेश्य है ताकि बच्चा अपने दैनिक जीवन की समस्याओं का समाधान कर सके। निष्कर्षतः कहा जा सकता है कि बच्चो के परिवेश

एवं दैनिक व्यवहारों से जोड़कर गणित की अवधारणाओं को स्पष्ट किया जाना चाहिए ताकि बच्चे के गणित संबंधी भय तथा भ्रमों को दूर किया जा सके, इसके लिए गणित की प्रकृति को जानना आवश्यक है। गणित की भाषा, संकेतों इत्यादि के माध्यम से बच्चे की सोच का गणितीयकरण बहुत जरूरी है।

1.9 प्रदत्त कार्य

1. आप गणित की प्रकृति की समझ का उपयोग कक्षा में किस प्रकार कर सकते है?
2. आप बच्चे की सोच का गणितीयकरण किस प्रकार कर पायेंगे?
3. कक्षा 2 में गणित की अवधारणाओं का अमूर्तीकरण कर पाने की प्रक्रिया को उदाहरण सहित स्पष्ट करें।
4. बच्चो को गणित में मजा आये, आप इसके लिए क्या करेंगे?
5. गणित की प्रकृति को स्पष्ट करने के लिए विभिन्न चित्रों की सहायता से एक प्रोजेक्ट फाइल तैयार कीजिए।
6. 'विद्यार्थियों को गणित का अध्ययन करना क्यों अच्छा नहीं लगता?' इस विषय पर विद्यार्थियों से बात करें तथा कारणों का विश्लेषण कर प्रोजेक्ट तैयार करें।
7. कक्षा 1 से 5 तक की गणित की पुस्तकों को ले जाइए। प्रशिक्षुओं को छोटे–छोटे समूहों में बाँट दें। प्रत्येक समूह में एक–एक पुस्तक देकर उनमें गणितीयकरण के पाँच–पाँच तत्वों को ढूँढने के लिए कहे।
8. कुछ गतिविधियों पर आधारित विडियो क्लिप देखकर उसमें गणितीयकरण के तत्व को ढूंढ़े तथा उनकी सूची बनाइए।
9. अध्ययन केन्द्र पर अपने साथियों के साथ चर्चा कीजिए कि गणितीय अवधारणाओं को बच्चे के परिवेश से जोड़कर सिखाना क्यों आवश्यक है?
10. कुछ इबारती सवालें लें। बच्चे के स्तर पर आकर सोंचें कि बच्चों की उन सवालों को करने में क्या–क्या कठिनाइयाँ आएगी। उनकी सूची बनावें।
11. प्रशिक्षाओं को छोटे–छोटे समूहों में बाँटकर गतिविधि कराई जा सकती है और अन्त में उन सभी का मिलान किया जा सकता है।
12. प्रशिक्षुओं को छोटे–छोटे समूहों में बाँटें। प्रत्येक समूह को तीन–तीन इबारती प्रश्न उपर्युक्त प्रश्नों की भाँति चरणों में खण्डित करके हल निकालने के लिए कहें।
13. कम्प्यूटर पर एक ही इबारती प्रश्न को भाषा बदलकर कई रूपों में लिखें तथा साथियों के साथ चर्चा करें कि कौन से प्रश्न की भाषा सरल है और क्यों?
14. अपने विद्यालय में मध्याहन भोजन संचालन हेतु सामान संग्रह से लेकर भोजन वितरण तक कौन–कौन सी गणितीय क्रियाएँ होती है, उनका विवरण प्रस्तुत करें।
15. प्रशिक्षुओं को छोटे–छोटे समूहों में बाँट दें। तीन या चार अंकों वाली कुछ संख्याएँ प्रत्येक समूह को देकर योग की क्रिया एकाधिक तरीकों से करने के लिए कहें। इन क्रियाओं में गणितीयकरण की सिथितियाँ कहाँ–कहाँ बनी, उनका विवरण भी लिखने के लिए कहें।

इकाई–2
गणित सीखने–सिखाने के विभिन्न आधार

2.1 परिचय
2.2 सीखने के उद्देश्य
2.3 पूर्व अनुभव
2.4 गणित सीखना
  2.4.1 बच्चे की पृष्ठभूमि व समझ के आधार पर आगे बढ़ना
  2.4.2 बच्चे अपने ही तरीकों से सीखते हैं
  2.4.3 संबंध जोड़कर सीखना
  2.4.4 गणित की भाषा
2.5 गणित सिखाने का एक संभावित क्रम
  2.5.1 अ–भा–चि–प्र
  2.5.2 औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की आवश्यकता
2.6 गणित सिखाने के बारें में कुछ और बातें
  2.6.1 खेल–खेल में सीखना
  2.6.2 जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो
  2.6.3 बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं
  2.6.4 ग़लतियां उपयोगी होती हैं
2.7 गणित एवं संज्ञानात्मक विकास
  2.7.1 पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था
  2.7.2 मूर्त संक्रियात्मक अवस्था
2.8 सारांश
2.9 प्रदत्त कार्य

2.1 परिचय

गणित की कक्षा में जाने के क्रम में जब हम कक्षा–पूर्व तैयारी करते हैं तो कई अनुभवों यथाः बच्चों को अवधारणा पर कैसे लायेंगे, उनसे विषयवस्तु से जुड़ी कौन सी गतिविधियाँ करायेंगे, उनके बीच कैसी सामग्री प्रदर्शित करेंगे, बच्चों की सक्रिय सहभागिता के लिए क्या करेंगे, नयी अवधारणा को उनके बीच कैसे प्रस्तुत एवं स्पष्ट करेंगे, बच्चों ने सीखा या नहीं इसकी जाँच कैसे करेंगे आदि को ध्यान में रखते हैं। शिक्षण अधिगम प्रक्रिया की जो संरचना हमारे द्वारा की जाती है उसमें उपरोक्त अनुभवों को भी एक क्रमबद्ध तरीके से प्रस्तुत किया जाता है। अधिगम प्रक्रिया का यह क्रमबद्ध प्रस्तुतीकरण ही शिक्षण विधि कहलाती हैं। हमारे पढ़ाने का तरीका तथा पाठ को कक्षा में प्रस्तुत करने का तरीका कैसा हो। यहाँ न केवल हमारे शिक्षण कौशल वरन् पाठ्यवस्तु की प्रकृति, बच्चों के सीखने के तरीके, कक्षा में उपलब्ध संसाधनों एवं विषयवस्तु की प्रकृति पर भी निर्भर करता है तथा इसको ध्यान में रखते हुए ही हम अपनी शिक्षण विधि तय करते हैं। यही कारण है कि गणित विषय में अलग–अलग अवधारणाओं को स्पष्ट करने के लिए अलग अलग विधियों को प्रयुक्त किया जाता है।

2.2 सीखने के उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के उपरांत :

- प्रारंभिक स्तर पर गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों की समझ बना सकेंगे।
- गणित शिक्षण के संदर्भ में सर्जनवाद का आलोचनात्मक विश्लेषण कर सकेंगे।
- गणित अधिगम को अर्थपूर्ण, चुनौतीपूर्ण, आनंददायी एवं प्रभावी बनाने हेतु विभिन्न क्रियाकलापों के आयोजन में सक्षम हो सकेंगे।

2.3 पूर्व अनुभव

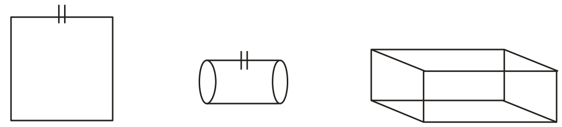
पिछली इकाई में हमने जाना कि हम सभी का गणित से रोजमर्रा का वास्ता है, सुबह समय पर उठने में, किसी काम को करने में लगने वाले समय, हिसाब–किताब, यहाँ तक कि सुबह की चाय की चुस्की में भी जाने अनजाने हम इसका इस्तेमाल करते है। हमने यह भी देखा कि किस तरह गणित का नाम लेते ही लोगों को इससे डर लगता है या फिर यह कठिन लगता है और कुछ लोग ऐसे भी होते है जो इससे प्यार करते है। अंत में हमने यह भी देखा कि गणित की प्रकृति के मुख्य आधार क्या–क्या है और गणितीकरण को भी जाना। इस इकाई में हम गणित को सीखने के पीछे छिपे पहलुओं, बच्चों के गणित सीखनें के तरीकों, बच्चों के गणित सीखनें की भाषा तथा गणित में हो रहे निरन्तर विकास के बारे में जानेंगे। बच्चे जिज्ञासा, अनुभव से सीखते हैं, वे खाली स्लेट नहीं हैं।

2.4 गणित सीखना

बच्चे गणित की अवधारणाओं को कैसे सीखते हैं? बच्चे को गणित संबंधी अवधारणाओं के बारे में कुछ तो समझ में आ जाए? हमें बच्चे के विकास के स्तर के मुताबिक ही अवधारणा उसके सामने रखनी चाहिए। हमें यह जानना होगा कि उस अवधारणा को सीखने के लिए बच्चा या बच्ची किस हद तक तैयार है, या नहीं है। जैसे कि जोड़ने और घटाने का संबंध समझने के लिए बच्चों को यह समझ में आना चाहिए कि सभी क्रियाएं, **प्रतिवर्त्य (reversible)** होती हैं। और जब वह इसे समझेंगे तभी **सरंक्षण (Conservation)** समझने की ओर बढ़ सकेंगे।

प्रतिवर्त्यता का सिद्धान्त : यदि किन्हीं चीजों पर की जा रही क्रियाओं का क्रम ठीक उलट दिया जाये तो उलटे क्रम में की जा रही क्रियाएं उन चीजों को वापस उनकी मूल अवस्था में पहुंचा देती है।

संरक्षण का सिद्धान्त : किसी भी चीज की मात्रा (गिनती, द्रव्यमान, द्रव) वही बनी रहती है भले ही उसकी जगह या उसका आकार बदल दिया जाये। सोचिए यदि आपको एक कागज़ देकर उससे बेलन, घनाभ इस प्रकार बनाने को कहा जाये कि कागज के चारों कोनो को केवल जोड़ा जा सकता हो, तो क्या उस कागज़ का क्षेत्रफल संरक्षित रहेगा।



क्या ऐसी बनायी बेलन व घनाभ का तल ढका मान लिया जाये तो उनका आयतन एक सा होगा या अलग–अलग। सोचिए।

यह जानने के लिए कि बच्चे को गिनती के संरक्षण की समझ है या नहीं, आम तौर पर निम्नलिखित प्रयोग किया जाता है :

पहले, बच्चे को बराबर लंबाई की दो पक्तियों (लाइनों) में रखे बटन दिखाये जाते हैं, जहां दोनों लाइनों में एक जितने ही बटन है। बच्ची के सामने ही एक लाइन (नीचे दी हुई लाइन) के बटन फैला कर रख दिये जाते हैं। दूसरी लाईन (लाइन ख) को वैसे ही छोड़ दिया जाय तब बच्ची से पूछा जाता है कि दोनों लाइनों में रखे बटन गिनती में बराबर है या नहीं।

क • • • • • • •

ख • • • • • • •

मनोवैज्ञानिक **जीन पियाजे** (Jean Piaget) (1896–1980) के अनुसार :

जो बच्चे संरक्षण समझते हैं, वे कहते हैं कि दोनों लाइनों में बटनों की संख्या बराबर है क्योंकि आपने न तो लाइन ख से बटन उठाये हैं न ही लाइन क में बटन रखे हैं। वे यह भी तर्क देते हैं कि लाइन क के बटन ऐसे पास भी लाए जा सकते हैं जिससे कि दोनों लाइनों में बटनों की स्थितियाँ ठीक एक–सी हो जायें। यह तर्क दिखाता है कि इन बच्चों में अपने सोच की प्रक्रियाओं को प्रतिवर्तित करने की क्षमता है।

इस प्रयोग में बच्चे और बड़े के बीच हो रही बातचीत में यदि बड़ा, बच्चे की बात सुने और उसे समझने के लिए तैयार हो, उन्हें सोचने के लिए भी प्रेरित करे और बच्चे को समझने वाला एक स्वतंत्र इंसान मान कर चले तो बच्चे बहुत सीखेंगे। जैसे **ऐसे अनुभवों से बच्चे यह भी सीखेंगें कि कारण कैसे बताए जाएँ और तर्क कैसे दिए जाएँ।** जब बच्चे इस तरह के कई अनुभवों से गुजरते हैं, तब उनमें धीरे–धीरे गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित होती है। और यह क्षमता फिर रोज़मर्रा के जीवन में गणित के उपयोग को और पैना बनाती है।

प्रश्न : किसी अवधारणा की समझ को विकसित करने के लिए, ऊपर दिये गए उदाहरण की तरह बड़े और बच्चे की बातचीत का एक उदाहरण दें।

किसी खास अवधारणा/कौ"ल को बच्चे तभी सीख सकते हैं, जब वे उनके लिए तैयार हों।

2.4.1 बच्चे की पृष्ठभूमि व समझ के आधार पर आगे बढ़ना

कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। हर बच्चे की उम्र, जानकारी का स्तर, पृष्ठभूमि वगैरह अलग होती है। एक ही कक्षा में भी बच्चों के अनुभव में अंतर होता है। जो बच्चे घर में रुपये पैसे का लेन देन होते देखते हैं अथवा समान का नाप–तौल होते देखते हैं वे इन अवधारणाओं से ज्यादा परिचित होते हैं। अन्य बच्चे अन्य तरह की पृष्ठभूमि से आते हैं। कक्षा में इन अलग–अलग बच्चों के अनुभवों को साझा कर गणित सीखने को बेहतर बताया जा सकता है। एक शिक्षक के लिए इन बातों के महत्व को समझना व इनके साथ–साथ सीखने के अलग–अलग तरीकों को ध्यान में रखना जरूरी है। कक्षा में अनेक तरह के बच्चे होते हैं अकसर पढ़ाते समय हम ऐसे उदाहरण देने लगते हैं जिनमें बच्चों

चित्र 1 : एक ि"क्षक को अपने सीखने वालों में जो

के अनुभव क्षेत्र का उपयोग होता। जैसे गिनने, जोड़ आदि के बारे में बात करते समय बच्चों द्वारा खेले गए खेलों के अनुभव के स्थान पर अपरिचित व जटिल संदर्भों से शुरू करते हैं। हर तरह के बच्चे के लिए कक्षा की रचना नहीं हो सकती किन्तु हर बच्चे के लिए कक्षा में जगह होनी चाहिए। वह अपने अनुभव का उपयोग कर पाए यह सुनिश्चित करना होगा।

प्रश्न (क) : शिक्षक को पढ़ाते समय किन बातों को ध्यान में रखना चाहिए?

प्रश्न (ख) : बच्चे के अनुभव क्षेत्र में आने वाले दो–तीन ऐसे उदाहरण दे जो जोड़ के संदर्भ में उपयोग हो सकें?

पृष्ठभूमि के अलावा गणित सिखाते समय बच्चे के सोचने के ढंग को भी ध्यान में रखने की जरूरत है। वे किस ढंग से सवाल हल कर रहे हैं समझ कर उस तरीके को भी ज्यादा सरल बनाया जा सकता है। चलिए एक उदाहरण देखते हैं जिसमें एक शिक्षक ने अपने विद्यार्थी की सीखने में मदद करने के लिए उसकी समझ को ध्यान में रखा।

उदाहरण–1

एक गांव के स्कूल में पांचवी कक्षा की एक लड़की सुमिता, को जोड़ और घटा करने के औपचारिक तरीके से परिचित कराया जा रहा था। शिक्षक ने औपचारिक तरीके से पहले यह समझने की कोशिश की कि उसे पहले से ही कितना आता है।

शिक्षक : 8 और 11 कितने होते हैं?

सुमिता : 19

शिक्षक : यह तुमने कैसे किया?

सुमिता : गिनकर। मैंने पहले 11 लिया और फिर 8 जोड़ दिए।

सुमित ने बड़ी संख्या से "आगे गिनने" (counting on) का तरीका अपनाया था और अपना तरीका वह शब्दों में समझा भी पाया था।

शिक्षक : अच्छा! 22 जोड़ 19 कितना होगा?

सुमिता : (22 + 19 लिखकर) : 41?

शिक्षक : तुमने क्या 22 से आगे एक–एक करके गिना?

सुमिता : मैंने पहले 19 में से 10 लिए, और इसे 22 में जोड़ा इस तरह हो गए 32, और फिर बचे हुए 9 लिए, और 41 हो गए।

इस बार सुमिता ने "पुनः समूहीकरण" (regrouping) का तरीका अपनाया ताकि वह आसानी से जोड़ सके।

प्रश्न : पुनः समूहीकरण के तरीके से जोड़ करने का एक और उदाहरण दें।

$$
\begin{array}{r} 18 \\ +5 \\ \hline \\ \hline \end{array}
$$

इसके बाद उसे एक लिखित अभ्यास दिया गया। सवाल था

इसे सुमिता ने हल किया व उसका उत्तर था– 41

उसका यह उत्तर कैसे आया? उसने इकाई के कॉलम में 8 और 5 को ठीक जोड़कर जवाब पाया 13, फिर 1 को इकाई के कॉलम के नीचे लिखकर, "हासिल" के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड दिए। इस तरह इकाई के कॉलम में आया 4 इसलिए, उसका उत्तर था 41!

सुनीता को यकीन था कि उसका उत्तर सही है। तब शिक्षक ने प्रश्न को दूसरी तरह से पूछा। उन्होंने कहा, "अगर तुम्हारे पास 18 सिक्के हैं और तुम्हें 5 और मिल जाएँ, तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितने सिक्के होंगे?" सुमिता ने अपनी उंगलियों पर गिना और कह, 23। जब शिक्षक ने उसका ध्यान उसके लिखित उत्तर की तरफ दिलाया तो वह मान गयी कि वह उत्तर गलत था। यह रोचक है कि वह औपचारिक तरीके की बजाए अपने मन से किए तरीके को सही मानने को तैयार थी।

इस उदाहरण में सुमिता ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित और कुशल तरीकों को इस्तेमाल करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्शन किया। हालांकि उसे औपचारिक प्रतीकों से जोड़–तोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं। जैसे सुमिता को स्थानीय मान की पूरी समझ नहीं है। या सुमिता को दी गई संख्याओं को जोड़ने का यह काम गणितीय नियमों से करना सार्थक न लगा हो। जैसे ही शिक्षक ने सवाल को एक संदर्भ में और ठोस वस्तुओं (सिक्के गिनने) के साथ रखा, सुमिता उसे समझ गयी और इसलिए हल भी कर पायी।

सवालों को बच्चों के अनुभवों व समझ के संदर्भ में रखना चाहिए।

यह उदाहरण साफ तौर पर दिखाता है कि सुमिता ने जोड़ करने के अपने तरीके विकसित कर लिए हैं; "आगे गिनना" और "पुनः समूहीकरण"। वह संख्याओं के पैटर्नों से परिचित थी और इसलिए वह पुनः समूह बनाकर बड़ी संख्याओं को भी आसानी से जोड़ पायी। उस जानकारी का उपयोग करके शिक्षक ने सवाल को दो तरह से सुमिता के सामने लाने की कोशिश की। यह तरीके हैः

(i) सवाल को उसके अनुभवों के संदर्भ में रखकर, और

(ii) सवाल को उसके लिए ठोस बनाकर।

उदाहरण–2

रवि पटना के एक स्कूल में शिक्षक है। वह कक्षा 4 के नया बच्चों को गणित पढ़ाता है। जब नया स्कूल–वर्ष शुरू हुआ तो वह पाठ्य पुस्तक खोलकर बच्चों को 4 अंकों वाली संख्याएं लिखना सिखाने लगा। उसने किताब में से कुछ हिस्सा बोर्ड पर उतार लिया। उसके बाद उन्हें ढेर सारे सरल सवाल देकर कमरे से बाहर चला गया। बाद में, उसे यह देखकर आश्चर्य हुआ कि अधिकतर बच्चे सवालों को नहीं कर पाए थे। आपके हिसाब से बच्चों की ऐसी परिस्थिति क्यों बनी?

जब किसी बच्चे की कोई अवधारणा सिखाई जा रही हो तो यह पहचानना महत्वपूर्ण है कि पहले से उसे क्या–क्या मालूम होना चाहिये, और क्या वह उतना सीख चुकी है?

2.4.2 बच्चे अपने ही तरीकों से सीखते हैं

विभोर से यह पूछा गया कि 'आठ चीजों की सात ढेरों' में कुल कितनी चीजें हैं? उसने कहा उसे नहीं पता। उससे फिर पूछा गया, ''क्या तुम इसका जवाब मालूम कर सकते हो?'' कुछ देर तक चुप रहने के बाद विभोर ने कहा ''56'', तुमने यह कैसे निकाला?'' विभोर ने बताया, ''दस अट्ठे 80 होता है। उसमें से 8 घटाएं तो 72, फिर 8 घटाएं तो 64 और फिर 8 घटाएं तो 56 बचता है।''

कक्षा 3 की शान्ता से 189 – 67 हल करने को कहा गया। उसने कहा कि यह 3 + 30 + 89 है उसके इस तरीके को शिक्षक ने 'गलत' ठहराया क्योंकि उनका जवाब पाने का तरीका '189 से 7 घटाएं और फिर 60'

अगर इस तरह से बच्चों को अपने तरीकों से सवालों को हल करने से रोका जाए तो उनका सोचने, संबंध बनाने और गणित में पैटर्न पहचानने की क्षमता के विकास में रूकावट पड़ती है। अगर आप बच्चों को गणित के सवाल अपने तरीकों से करने दें, तो आपको उनके सोचने में अभूतपूर्व विविधता दिखाई देगी। ''बच्चों को गणित पढ़ाते हुए मुझे अक्सर इस बात पर हैरानी होती है कि बच्चे कितने अलग–अलग तरीकों से सवालों को हल करते हैं। उनके सवाल और जवाब के बीच अकसर तर्कों का एक सिलसिला होता है। जिन्हें बच्चे अक्सर खुद ही सोचते हैं। मैंने एक बार बच्चों को दो अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा करना सिखाया। मैंने कुछ सवाल हल किए और कई बार ऐल्गोरिद्म समझाया। फिर मैंने उन्हें यह सवाल दिया

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

सबसे पहले सवाल हल करने वाली बच्ची का जवाब था 156, उसकी कॉपी में सवाल के ठीक नीचे यह जवाब लिखा था। मैंने उसकी रफ कॉपी देखी तो उसमें 100 20 30 6 लिखा था। बार–बार पूछने पर बच्ची ने कहा, ''मैनें पहले 10 को 10 से गुणा किया, फिर 2 को 10 से, वगैरह।''

तब मैंने यह समझा कि यह संतोष करना कि सही उत्तर तक पहुँच गए उतना ही जरूरी है या शायद कमतर ही है यह जानने से कि वहाँ पहुँचे कैसे। इसने इस बात को भी रेखांकित किया कि हमारा सोचने का ढंग एकसा नहीं होता और **बच्चे अपने तरीकों से सवाल हल करते हैं?** ये तरीके सही भी हो सकते हैं और गलत भी। पर करने वाले की नजर में वे ही सही होते है। बच्चों से अंतःक्रिया करते समय इस बात को समझना अत्यंत आवश्यक है।

अपने नये गणितीय अनुभवों को समझने के लिए बच्चे अपने पुराने तरीकों को बदलते रहते हैं और उनके मुताबिक नए तरीके खोजते रहते हैं। सही माहौल मिले तो यह सिलसिला जारी रहता है और बच्चे को स्वाभाविक रूप से गणित समझने और गणितीय तौर पर सोचने के लायक बनाता है। लेकिन अगर बच्चों पर तथाकथित सही तरीके थोपे जाएँ और अलग हट कर नए ढंग से कुछ करने की गुंजाइष न छोड़ी जाए तो धीरे–धीरे अपने तरीके निकालने और अवधारणाओं को समझने की उनकी क्षमता और इच्छा कम होने लगती है और इसी के साथ–साथ रूचि भी।

करके देखें :

अपनी कक्षा के बच्चों को गणित का कोई नया सवाल दें। उन्हें इसे हल करने का तरीका न बताएँ। क्या सभी बच्चे सवाल को हल करने के लिए एक ही तरीका अपनाते हैं? वे किन–किन तरीकों से यह सवाल हल करते हैं?

प्रश्न : यहां हम 4 सवाल दे रहे हैं। चार बच्चों ने इनमें से एक–एक सवाल, निम्नांकित रूप से हल किये। बताइये इन सवालों को हल करने के लिए बच्चों ने कौन–कौन से तरीके अपनाये?

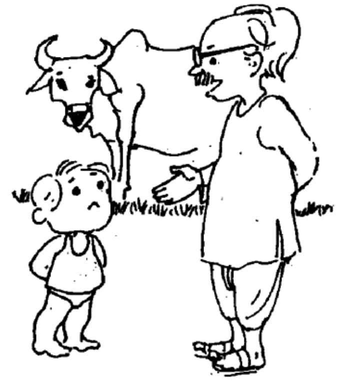
(क) 8+6 = 8+2+4 = 14

(ख) 4+9 = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 = 13

(ग) 3+12 = 13, 14, 15 = 15

(घ) 7+5 = 1+1+..................+1(7 बार)+1+1+1............+1(5 बार) = 12

2.4.3 संबंध जोड़कर सीखना



चित्र 2 : इसके सींग क्यों है? क्योंकि जब... इसलिए।

हम जानते हैं कि गणित सीखने के दौरान उत्तर पाने की प्रक्रिया पर ज़ोर देने की ज़रूरत है, न कि सिर्फ उत्तर पाने पर। इसलिए, एक शिक्षक की हैसियत से यह जरूरी है कि आप बच्चों को अपने आस–पास की दुनिया को गौर से देखने, सवाल पूछने, खोज करने और तर्कों के आधार पर उत्तर ढूंढने के लिए बढ़ावा दें। यह भी जरूरी है कि आप उन्हें अपने तार्किक सोच को व्यवस्थित करने के लिए प्रेरित करें। इसके लिए पहले तो, आप बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रेरित करें। जब बच्चे, आपसे पूछें, "कुछ पत्ते हरे और कुछ पत्ते भूरे क्यों होते हैं?" या "चांद हमारे साथ–साथ कैसे चलता है?" या "मरने के बाद लोग कहां चले जाते हैं", आपका जवाब ऐसा होना चाहिए कि उन्हें संतुष्ट कर सके। आपको ये प्रश्न चाहे कितने ही कठिन या बेवकूफी भरे लगें आपको उन्हें गंभीरतापूर्वक लेना चाहिए और तार्किक तरीके से उत्तर ढूंढने में उनकी मदद करनी चाहिए।

एक और बात जो मदद करती है वह है बच्चों के सामने ऐसे प्रश्न रखना जिनके कि उन्हें पहले से ही निश्चित जवाब न दिए जाएं। जैसे, "इस कागज को तुम कितनी तरह से एक वर्ग की शक्ल में मोड़ सकते हो?" उन्हें अपने प्रश्न खुद बनाने का मौका दिया जा सकता है जैसे कि सवाल जवाब या अटकलबाज़ी के खेलों में। इस तरह के मौके देने से बच्चे बहुत सी बातें आसानी से और रोचक तरीके से सीखते हैं। ऐसा करने से बच्चों को अपनी मानसिक क्षमताएं विकसित करने का मौका भी मिलता है। इनसे बच्चों को यह अहसास भी होता है कि एक सवाल के कई जवाब भी हो सकते हैं।

बच्चे अपने तर्कों को व्यवस्थित करें इसके लिए उन्हें बढ़ावा व मार्गदर्शन देने के लिए आप बहुत तरह की गतिविधियां सोच सकते हैं। जैसे, उनसे चीज़ों के एक ढेर का वर्गीकरण करने के लिए मापदंड (criteria) चुनने को कहा जा सकता है, और इन मानदंडों को सही तरह से लागू करने में उनकी मदद की जा सकती है। या वे अपने स्कूल के साथियों के स्कूल आने के अलग–अलग तरीकों की परिकल्पना कर सकते हैं। फिर वे आंकड़े इकट्ठे करके, उन्हें लिखकर और उनका विश्लेषण करके परिकल्पना को सिद्ध कर सकते हैं या उसका खंडन कर सकते हैं।

प्रश्न (क) मापन में एक विषय चुनिये और उनसे अपने ही संदर्भ में दो ऐसी गतिविधियाँ बनाइये जिनसे आपके विद्यार्थियों को इस अवधारणा की छानबीन करने और सीखने में मदद मिले।

(ख) कुछ बच्चों के साथ इन गतिविधियों को करिये और लिखिये कि किस प्रकार ये गतिविधियाँ बच्चों के गणितीय सोच को बढ़ावा देती हैं।

2.4.4 गणित की भाषा

कक्षा 2 के ि"ाक्षक संख्या 11 की मिसाल लेकर स्थानीय मान की अवधारणा समझा रहे थे। उन्होंने शुरूआत इस तरह की, ''एक और एक ग्यारह होते हैं।'' कुछ बच्चे, जिन्होंने अब तक यह सीखा था कि एक और एक दो होते हैं, चक्कर में पड़ गये। यह भ्रम ि"ाक्षक की भाषा से भी उत्पन्न हुआ।

बच्चों के साथ गणितीय अवधारणाओं पर चर्चा करने के लिए भाषा की जरूरत तो होगी ही। गणित के लिए भाषा का उपयोग करते समय कुछ खास शब्द व उपयोग के तरीके सामने आते हैं। यानि गणित सीखते वक्त बच्चों को गणित के साथ–साथ उसकी भाषा को भी समझना होता है। इसलिए अगर कोई बच्चा गणित की किसी अवधारणा को नहीं सीख पा रहा है तो इसका कारण वह भाषा हो सकती है जो उसे अवधारणा सिखाने के लिए इस्तेमाल की जा रही है। हो सकता है कि वह भाषा ही भ्रम पैदा कर रही हो। वैसे भी सीखते समय सिखाने वाला कुछ गलतियाँ करके ही सीखता है और यह गणित की भाषा सीखने के संदर्भ में भी सही है।

"गणित की भाषा और भाषा के रूप में गणित, बच्चों को दोनों को समझने का प्रयास करना है।"

प्रश्न : अपने अनुभव से कुछ ऐसे उदाहरण दें, जो ये दिखाएँ कि भाषा के कारण बच्चों के गणित की अवधारणाओं को समझने में दिक्कतें होती है।

कभी–कभी कुछ बच्चे उन शब्दों को नहीं जानते जो किताबों में होते हैं या जिन्हें ि"ाक्षक इस्तेमाल करते हैं। जैसे कि 'लघु', '"ोष', 'समान', 'भिन्न', 'गुणनफल', 'प्रत्येक' जैसे शब्दों को न जानने से गणित समझने में रूकावट हो सकती है। साथ ही, एक ही गणितीय अवधारणा अथवा संक्रिया के लिए अलग–अलग शब्द उपयोग होने पर भ्रमित हो सकते हैं। जैसे कि, घटाने के लिए 'कम करो', 'अंतर निकालो', 'व्यवकलन करो', सभी इस्तेमाल किए जाते हैं।

बड़े बच्चों को भी अक्सर इन समस्याओं का सामना करना पड़ता है। ऐसा इसलिए क्योंकि हर स्तर पर गणित की अवधारणाओं को सिखाने के लिए भाषा इस्तेमाल होगी और इसका स्वरूप बदलता व अधिक समृद्ध होता जाता है। इस भाषा को सीखने की कोि"ा"ा हर स्तर पर करनी पड़ती है। बच्चों को इस बात के लिए बढ़ावा देना चाहिए कि वे गणित की अवधारणाएं सीखते हुए उनके बारे में बात करें। इस तरह से गणित की भाषा सीखने में उन्हें मदद मिलती है।

कुछ बच्चे किसी इबारती सवाल की लम्बाई और जटिलता से भी चकरा सकते हैं। जैसे कि यह सवाल लें, ''25 और 30 के बीच में वह कौन सी संख्या है जिसे 2 और 3 दोनों से पूरा–पूरा भाग नहीं दिया जा सकता?'' यह वाकई एक जटिल सवाल है। किन्तु इसकी जटिलता को भाषा का स्वरूप बदलकर थोड़ा सा सरल कर सकते हैं। बच्चों को यही सवाल अगर इस तरह दिया जाए– ''25 और 30 के बीच में एक संख्या है। इस संख्या में 2 अथवा 3 का पूरा–पूरा भाग नहीं जाता। यह संख्या कौन सी है ?''

प्रश्न : गणित के नीचे दिए गए सवाल को कक्षा 2 के और कक्षा 4 के बच्चों को आप किन तरीकों से समझाएंगे?

''एक चौथाई, आधे से कम क्यों है?''

आप जिस भाषा का इस्तेमाल करते हैं, उस पर गौर करें?

अगले हिस्से में हम गणित सीखने के संदर्भ में बच्चों की विकास प्रक्रिया के बारे में चर्चा करेंगे। इस चर्चा से हमें गणित की कक्षा को बेहतर गढने के तरीके खोजने में मदद होगी।

2.5 गणित सिखाने का एक संभावित कम

2.5.1 अ–भा–चि–प्र

क्या इस शीर्षक ने आपको चक्कर में डाल दिया ? इसी तरह बच्चे भी ऐसे नये प्रतीकों को समझ नहीं पाते जो पूरी तरह समझाए बिना उन पर थोप दिए जाते हैं। बच्चों में गणित की समझ बनाने के लिए आपको उन्हें सावधानी से बनाए गए क्रम में सीखने के अनुभव देने होंगे। कुछ भी और सीखने की तरह ही गणित सीखना भी एक निरंतर प्रक्रिया है। बच्चों को ठोस अनुभवों का क्रम होना चाहिए :

(अ) ठोस वस्तुओं के साथ **अनुभव** (जैसे, कंकड़, लकड़ियां या अन्य कोई भी आसानी से मिलने वाली चीज़ें);

(भा) बोलकर अनुभवों के बारे में बताना, यानी कि **भाषा** का उपयोग (जैसे, शब्द/कहानी सवालों के उपयोग से, खेलों से);

(चि) अनुभव को **चित्रों** द्वारा दिखाना (जैसे, मात्रा को चित्रों द्वारा दिखाना);

(प्र) अनुभव का लिखित **प्रतीकों** द्वारा व्यापकीकरण (जैसे, संख्यांक)।

चलिये, यह मान कर कि कोई बच्चा पूर्ण संख्याओं से परिचित है, उसकी ऋणात्मक संख्याओं की अवधारणा सीखने के संदर्भ में इस क्रम को देखें।

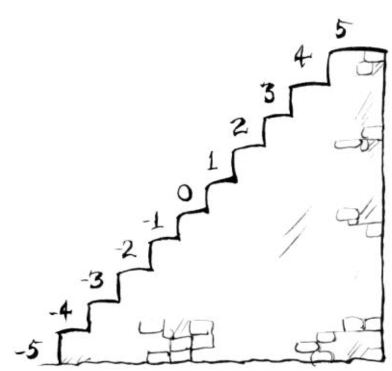
यहाँ चीजों का उपयोग कर ठोस के साथ अनुभव करवाने के संदर्भ को सोचना होगा। यहाँ प्राकृत संख्या की तरह चीज़ें नहीं दे कर गिनवा सकते।

यहाँ हमें एक ऐसा उदाहरण चुनना होगा जिसमें हम भूतल को शून्य मानें। ऊपर जाने वाली सीढ़ीयाँ धनात्मक संख्या हैं। और नीचे तहरवाने में जाने वाली शून्य से धीरे–धीरे कम होती जाती हैं। बच्चों को सीढ़ियों पर ऊपर–नीचे जाने का अभ्यास करवा सकते हैं।

इसी तरह किसी गढ्ढे की गहराई के लिए ऋणात्मक संख्या के उपयोग से बच्चे देख सकते हैं कि गहराई बढ़ने का अर्थ है ज्यादा ऋणात्मक संख्या होगी।

(अ) बार–बार तहखाने में जाने कि अथवा पहली मंजिल पर जाने को कह कर के और उनसे संख्या धनात्मक होगी अथवा ऋणात्मक पूछ कर व उन्हें ऐसे कथन गढ़ने का कह कर उनसे धनात्मक व ऋणात्मक संख्या को भाषा के रूप में उपयोग करवा सकते हैं।

(चि) ऐसे चित्र बना कर बच्चों को चित्र पर अलग–अलग संख्या दिखाने को कह सकते हैं। वे चित्र लेकर आपस में खेल सकते हैं। ऋणात्मक संख्या के उदाहरण में वह प्रतीक का परिचय भी प्राप्त कर लेते हैं।



(प्र) इसके बाद ठोस वस्तुओं व चित्र के बिना ऋणात्मक संख्याओं को प्रतीकों के रूप में अभ्यास करते हैं।

इस क्रम में बच्चे ठोस अनुभव को महसूस करके व उसके साथ कार्य करके धीरे–धीरे अमूर्तता की ओर बढ़ते हैं और प्रतीकों के उपयोग करने तक उससे पूरी तरह सक्षम हो जाते हैं।

(अ) वे अपनी रोटी/सैंडविच, या रंगीन काग़ज का एक टुकड़ा, या अन्य कोई भी ऐसी चीज़ों को आधे–आधे में बाँटते हैं। बाद में वे, मान लीजिये, 6 चीज़ों को दो समूहों में बाँटते हैं।

(भा) वे शब्द "आधे" को मात्रा से जोड़ने लगते हैं। आप ऐसे खेल बना सकते हैं, जिससे वह अलग–अलग भिन्न संख्याओं के नामों से परिचित हो पाए।

(चि) आप चित्र 4 में दिखाए गए तरीके से उसे विभिन्न चित्र दिखा सकते हैं,

प्रश्न क्या आप सीखने के क्रम अ–भा–चि–प्र की आवश्यकता से सहमत है? अ–भा–चि–त्र ज्यामिति आकृतियों के उपयोग में किस तरह से मदद करेंगा?

प्राइमरी स्कूल में बच्चे मूर्त–संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं। सीखने वालों को अगली अवस्था तक बढ़ने में मदद देने के लिए आपको ठोस व औपचारिक के बीच की कड़ियों पर ज़ोर देना होगा। अ भा चि प्र इसी तरह का एक क्रम है।

2.5.2 औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की आवश्यकता

आपको शायद ऐसा लगे कि एक बार यदि बच्ची कोई विशेष अमूर्त अवधारणा या प्रक्रिया समझ गयी है तो उसके बाद उसे अन्य अवधारणाएं या प्रक्रियाएं समझने के लिए ठोस अनुभवों की जरूरत नहीं है। लेकिन ऐसा नहीं है। औपचारिक गणित या मन में हिसाब अच्छी तरह कर पाने के बावजूद भी बच्चों को अवधारणाओं संक्रियाओं, सवालों, आदि को समझने के लिए वास्तविक चीज़ों और अनुभवों की जरूरत पड़ सकती है। उनके विकास का यह पेंचदार स्वरूप गणित सीखने की प्रक्रिया की विशेषता है।

उदाहरण के लिए, जब दो अंकों वाली संख्याएं सिखायी जाती हैं उससे पहले बच्चों को "स्थानीय मान" समझने की जरूरत होती है। इसके लिए उन्हें समूह बनाने के ढेर सारे ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी। इससे उन्हें धीरे–धीरे "दहाई" और "इकाई" समझने में मदद मिलेगी। इसके बाद वे छोटी संख्याओं के औपचारिक गुणा और भाग करने के लिए तैयार हो जाएंगे। और फिर उनमें बड़ी संख्याओं के संदर्भ में "स्थानीय मान" की समझ विकसित करने के लिए फिर विभिन्न प्रकार की सीखने के ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी।

इस तरह से, पहले छोटी संख्याओं और फिर बड़ी संख्याओं के संदर्भ में काम करने से बच्चों को अवधारणा की बेहतर समझ बनाने का मौका मिलता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक बच्ची एक नई अवधारणा, जोड़ में क्रमविनिमयता, को समझने की कोशिश कर रही है। शुरू में, इतना काफी है कि वह इस गुण को छोटी संख्याओं से, जिनसे वह पहले परिचित है, के लिए ही समझ ले। अभी वह बड़ी संख्याओं से, जिनसे वह शायद उतनी परिचित न हो, क्यों जूझे?

प्रश्न 1 क्या आप गणित के पाठ्यक्रम के पेचदार विकास के कुछ और उदाहरण दे सकते हैं?

प्रश्न 2 कक्षा 3 के एक बच्चे से $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ जोड़ने को कहा गया। उसने $\frac{2}{9}$ लिखा। आपको क्या लगता है कि ऐसा क्यों हुआ ? आप गलती ढूंढने व ठीक करने में उसकी मदद कैसे करेंगे?

प्रश्न 2 में सीखने वाले की मदद करने का एक तरीका है ऐसे इबारती सवालों का इस्तेमाल करना जिनका उसकी दुनिया से ताल्लुक हो। उदाहरण के लिये, यदि आप एक पूर्वस्कूली बच्चे को "दो" का अर्थ सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, तो एक अच्छा तरीका होगा कि आप उसे "मुझे दो पेन्सिलें दो" जैसे कई सवाल दें। इस तरह के सवालों को हल करते हुए बच्ची अभ्यास करती है व धीरे–धीरे "दो" का अर्थ पूरी तरह से समझ लेती है। इसी तरह, "तुम्हारे पास पाँच पेन्सिलें थीं, यदि मैने तुम्हें बारह और दीं तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितनी पेन्सिलें हो जाएंगी?" की तरह के इबारती सवाल करने से बच्चे जोड़ की अवधारणा बनाते हैं।

लेकिन, इबारती सवाल आम तौर पर कक्षा 1 के अंत में कराए जाते हैं। यह शायद इसलिए है क्योंकि हममें से कई लोगों की यह गलत धारणा है कि इबारती सवाल ऐल्गोरिद्मों का अभ्यास कराने का एक तरीका है। बड़ों की तार्किक सोच तय करती है कि औपचारिक प्रतीकों को पहले सिखाना चाहिए। क्या आप इससे सहमत हैं?

प्रश्न आपको क्या लगता है कि बच्चों को इबारती सवाल कब देने चाहिए– उनके औपचारिक एल्गोरिद्म में निपुण होने से पहले, या उसके बाद ? आपके मत का कारण क्या है?

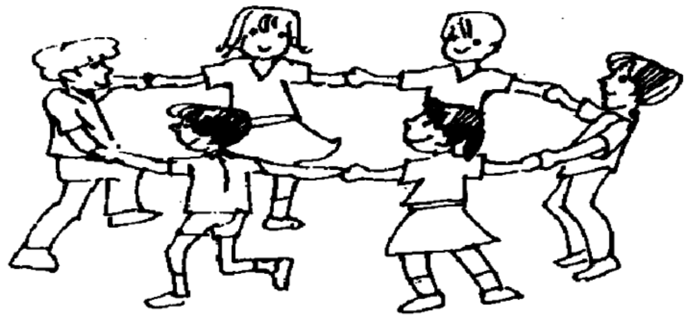
वैसे तो कोई भी पाठ्य पुस्तक ऐसे किसी एक स्तर से शुरू नहीं हो सकती जो हरेक बच्चे के लिए सही हो। यदि शिक्षक चाहते हैं कि वे गणितीय सोच व क्षमताओं की पक्की नींव बनाएं, तो यह महत्वपूर्ण है कि पूर्वस्कूली व प्राईमरी स्कूल के बच्चों के लिए वे पाठ्य पुस्तक के अलावा अन्य शिक्षण सामग्री का भी इस्तेमाल करें। वास्तव में, अपने आप में गतिविधियों पर आधारित एक पाठ्यक्रम दे देना ही काफी नहीं है। बेहतर यह होगा कि उसके साथ–साथ पाठ्य पुस्तक की जगह एक कार्यपुस्तक का इस्तेमाल किया जाए, ख़ास तौर से छोटे बच्चों के लिए।

एक बच्चे को किसी भी अवधारणा को समझने के लिए उसे ठोस अनुभवों से शुरू करके अमूर्त स्तर तक, पहुँचने के लिए सीखने के अनुभव एक क्रम में देने चाहिये। मोटे तौर पर यही क्रम रख कर, इसमें थोड़ी बहुत तब्दीलियाँ की जा सकती हैं। और क्रम के हर चरण में आपको यह जानना जरूरी है कि बच्ची को कितना समझ में आया है।

2.6 गणित सिखाने के बारें में कुछ और बातें

2.6.1 खेल–खेल में सीखना

बच्चे गणित की कई बुनियादी अवधारणाएं खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने पहचाने संदर्भों में खेलने में मज़ा आता है। उनके खेलों से, अपने आप ही, मज़े–मज़े में, बहुत सारी गणितीय गतिविधियां आ जाती है। नए विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों से कराया जा सकता है, जो उन्हें मज़ेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या परेशानी न हो। यही बात प्राईमरी के बड़े बच्चों के लिए भी लागू होती है।



चित्र 4 : बच्चे खेल–खेल में गणितीय आकारों के बारे में सीख सकते हैं।

जब छोटे बच्चे चीज़ों को आपस में बांटते हैं वास्तव में वे एक–से–एक का मेल मिलाते है। जब वे गुटकों से खेलते हैं तो वे अलग–अलग आकारों से प्रयोग कर रहे होते हैं। जब वे "पाँच छोटे बंदर" जैसा गाना गाते है तो वे संख्याओं के नाम सीखते हैं।

बच्चों को इबारती खेलों में भी मज़ा आता है। वे आम तौर पर शब्दों के पैटर्न पकड़ने में तेज़ होते है। क्योकि पैटर्न पहचानना गणितीय सोच का मूलभूत पहलू है, बच्चे अपनी भाषा विकसित करने के साथ–साथ वास्तव में गणित भी कर रहे होते हैं।

आप कोई भी गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए ढेरों खेल बना सकते हैं। ये खेल या तो पूरी कक्षा के साथ खेले जा सकते हैं, या छोटे समूहों में। खेल ऐसे भी बनाए जा सकते हैं जिनसे बच्चे संबंधित गणितीय भाषा भी साथ ही सीख जाएं।

यहां टीम में खेले जाने वाले कुछ खेलों के उदाहरण दिए जा रहे हैं।

क) एक टीम अपने सामने कुछ कंकड़ रख लेती हैं दूसरी टीम :

पहला खेल– उतने ही कंकड़ रखे, या

दूसरा खेल– गिने और बताए कि वे कितने हैं, या

तीसरा खेल – 14 कंकड (मान लीजिए) करने के लिए जितने भी कंकड़ और चाहिए उतने रखें, या

चौथा खेल – 3 कंकड़ छोड़ कर बाकी उठा लें, आदि।

जैसे – जैसे खेल आगे बढ़ता है आप उन्हें संख्याओं के नाम भी सिखा सकते हैं।

ख) एक टीम दो पासे (बिन्दु या संख्याओं वाले) फेंके और कंकड़ों के ढेर में से उतने कंकड़ उठा ले जितना कि दोनों पासों की संख्याओं का जोड़ हो (या अंतर हो, या गुणा हो)। दूसरी टीम भी ऐसा करे। दो बारियों के बाद जिसके पास भी ज्यादा कंकड़ होंगे वह जीत जाएगा। यहां भी, खेल के दौरान बच्चे "छः जोड़ दो बराबर आठ" जैसी भाषा से ज्यादा परिचित हो सकते हैं।

ग) कंकड़ों, पासों, टहनियों, कार्डों या मोतियों से आप "स्थानीय मान" सिखाने के लिए खेल बना सकते हैं। 10 कंकड़ों (10 के आधार के लिए) को एक कार्ड या एक मोती के बराबर मान कर, अदला–बदली जा सकती है और इसका लेखा–जोखा रखा जा सकता है। एक बार जब वे दहाईयों की पकड़ ठोस चीज़ों से बना लेते हैं तो उन्हें संख्यांकों का इस्तेमाल करने वाले खेलों से भी परिचित करवाया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, आप 10–10 कार्डों के दो समूह ले सकते हैं जिन पर 0 से 9 तक के संख्यांक लिखे हों। इन्हें बच्चों की दो टीमें इस्तेमाल करेंगी। बच्चे कार्डों को फेंट कर और उल्टे करके टेबल पर

रख दें। फिर वे बारी–बारी से, एक बार में एक कार्ड चुनेंगे और उसे बोर्ड पर "इकाई" या "दहाई" के स्तम्भ में रखेंगे। एक कार्ड जहाँ रखा जा चुका है यहाँ से हटाया नहीं जा सकता। उद्देश्य सबसे बड़ी संख्या बनाना है। वे जो भी नम्बर बनाएं उसे जोर से कह दें। उदाहरण के लिए, यदि पहले समूह का संख्या 3 का कार्ड खुला और उसे उन्होंने दहाई के स्तम्भ में रखा, तो उन्हें जोर से 30 कहना चाहिए, वगैरह।

यह खेल कार्डों की जगह दो पासों से भी खेला जा सकता है।

प्रश्न बच्चों को निम्नलिखित अवधारणा/कौशल सिखाने के लिए एक–एक खेल का उदाहरण लिखें।

अ. गुणा,

ब. एक वृत्त क्या होता है,

स. अन्दाज़ लगाने की क्षमता

यह भी बताएं कि इन अवधारणाओं या कौशलों को सिखाए जाने से पहले आपके हिसाब से बच्चों को क्या आना चाहिए।

नीचे हमने अटकलबाज़ी के कुछ खेलों के उदाहरण दिए हैं। इनसे बच्चों को अपने गणितीय सोच और भाषा का विकास करने के बहुत से मौके मिलते हैं–

(क) एक खेल में कक्षा के सामने जानी पहचानी चीज़ों का एक ढेर रख दिया जाए। एक टीम या बच्चे (आप जैसे भी खेल खिलाना चाहें) से किसी एक चीज़ को चुनने व उसका नाम शिक्षक के कान में कह देने के लिए कहा जाए। दूसरे बच्चे/समूह बारी–बारी से चुनी हुई चीज़ का अन्दाज लगाएं जिसके लिए वे उसके माप, आकार या दूसरी चीज़ों के सापेक्ष वस्तु का स्थान जैसे संकेतों को आधार बनाएं। जैसे, यह ज्यादा लम्बी है, ज्यादा भारी है, सामने रखी है, यह गोल नहीं है, आदि–आदि।

(ख) आप अटकलबाजी से ऐसे खेलों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें अन्दाज़ लगाने वाले कुछ ऐसे सवाल ही पूछ सकते हैं जिनके उत्तर "हाँ" या "नही" में ही हों। ऐसे खेल बच्चों को विशिष्ट सवालों से (क्यों वह दरवाज़ा है? किताब है?) ज्यादा व्यापक सवालों (क्या उस पर बैठ सकते हैं? क्या वह मेरे जितना बड़ा है? क्या कमरे में एक से ज्यादा हैं?) की ओर बढ़ने का मौक़ा देते हैं। इससे उत्तर तक पहुँचने के लिए जरूरी प्रश्नों की संख्या कम हो सकती है। जैसे, मान लीजिये कि चुनी हुई चीज़ 1 से 100 के बीच की संख्या है। शुरू में, शायद बच्चे अलग–अलग संख्याएं लेकर पूछें कि क्या वह 4 है, या 26 है, वगैरह। कुछ समय के बाद वे पूछना सीख जाएंगे कि "क्या वह 4 से बड़ी हैं?" "क्या वह सम संख्या है?" आदि। बाकी बच्चे भी इस तरीके को जल्दी पकड़ लेंगे। या, मान लीजिये, चुनी हुई वस्तु एक बेलनाकार डिब्बा है। तब प्रश्नों में गणित की शब्दावली आ जाएगी जैसे– क्या वह गोलाकार है? क्या वह किसी रेखा के प्रति सममित है ? क्या उसमें 4 कोण हैं?

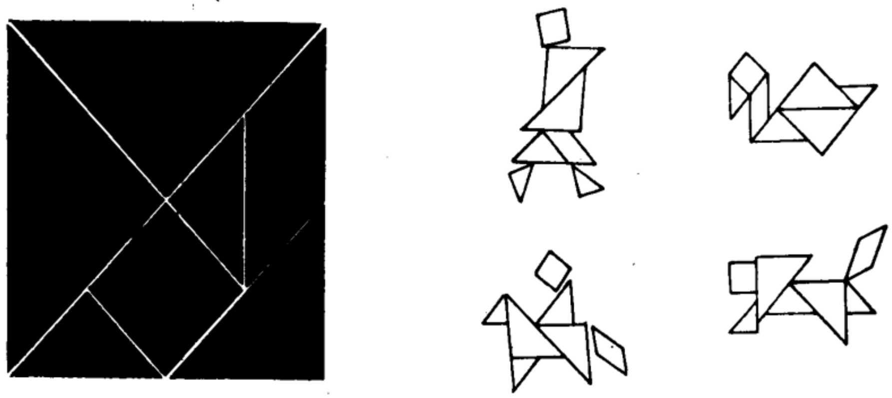
ऐसे खेल बच्चों की व्यापकीकरण करने, विशिष्टीकरण करने, अन्दाज लगाने व पैटर्न पहचानने की क्षमताएं विकसित करके उनके गणितीय सोच का विकास करते हैं। यानि कि, वे सब उनकी गणितीय सोच व तार्किक क्षमता बढ़ाते हैं।

और बच्चों में गणित की समझ बढ़ाने के लिए सामूहिक नृत्य और खेल–कूद की गतिविधियों, वगैरह के इस्तेमाल के बारे में आप क्या सोचते है? अब आप ऐसे ही कुछ उदाहरण दीजिए।

प्रश्न 1 बच्चों को समय के अन्तराल की अवधारणा से परिचित कराने के लिए अटकलबाजी का एक खेल बनाएँ।
प्रश्न 2 आप ज्यामिति की अवधारणाएँ सिखाने के लिए सामूहिक नृत्य का उपयोग कैसे करेंगे?

बहुत सारी अन्य मज़ेदार गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे, बच्चे सममिति के बारे में "रंगोली" के सममित पैटर्न काग़ज पर बना कर सीख सकते हैं।

ओरीगेमी, यानि कागज़ मोड़ने की कला, के द्वारा अलग–अलग दो व तीन–आयामी आकारों से उनका परिचय कराया जा सकता है। सिखाते वक्त, हर कदम पर शिक्षक गणित की शब्दावली पर जोर दे सकती है जैसे, "अब कागज़ को मोड़कर आधा करो", "फिर मोड़कर इससे एक वर्ग बनाओं", "जब तुम इस कोने को इस तरह से मोड़ोगे (दिखाकर), यह एक **त्रिभुज** बन जाएगा।" **टैनग्राम** का इस्तेमाल भी इसी उद्देश्य के लिए किया जा सकता है।



(क) (ख)

चित्र 5 : (क) एक टैनग्राम, (ख) टैनग्राम से बने कुछ आकार

अभी तक हमने ठोस से अमूर्त की ओर बढ़ना, ठोस विधि पर खूब समय लगाना, और गणित पढ़ाने के लिए मज़ेदार गतिविधियों का इस्तेमाल करना– इन बातों के महत्व पर जोर दिया। सीखने का माहौल बनाने के लिए यह सब काफी नहीं है। अगले खंड में हम इसके कुछ और पहलूओं पर चर्चा करेंगे।

2.6.2 जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो

बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे, चीज़े गिराना व उठाना, डिब्बे और टीन खोलना और बन्द करना, कुछ शब्दों को बार–बार दोहराना, ताक–झाँक का खेल बार–बार खेलना, बड़ों से बार–बार कहानियाँ दोहराने को कहना, आदि। क्या आप इनमें से किसी भी काम को रट कर सीखना कहेंगे? यानि कि,

दोहराव का मतलब रटना नहीं है।

दोहराने के ऐसे कई नए तरीके सोचे जा सकते हैं, जिनसे कि वह मज़ेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मज़ेदार गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं, जिनमें से कुछ की शुरूआत वे खुद भी कर सकते हैं। इन दोहरावों के दौरान भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया व फर्क देखते और अनुभव करते हैं।

दूसरी तरफ, रट कर सीखने में इस तरह की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया का दोहराव नहीं होता, बल्कि "जानकारी" ही मशीनी तरीके से दोहराई जाती है (उदाहरण के लिए, पहाड़े मशीनी तरीके से रट कर याद करना।)

अगर आप आस–पास देखें तो आप पाएंगे कि किसी भी बच्चे के माहौल में दोहराव स्वाभाविक तौर पर अलग–अलग रूपों में होता है। लेकिन सीखने के औपचारिक माहौल में बच्चों की रूचि बनाए रखने के लिए दोहराव को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर लाना पड़ता है। आप इस चुनौती को कैसे पूरा करेंगे? शायद नीचे दिया गया उदाहरण हमें कुछ विचार दे।

बच्चे आम तौर पर पहाड़ों से बहुत परेशान रहते हैं। क्या यह सचमुच जरूरी है कि उन्हें मशीनी तरीके से बार–बार दोहराया जाए? और क्या रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में मदद मिलती है? क्या यह सच नहीं है कि बच्चे एक दिए हुए क्रम में ही पहाड़ों का इस्तेमाल कर पाते हैं। यह बात उस समय साफ नज़र आती है जब आप किसी और क्रम में उनसे गुणज पूछें। क्या यह बेहतर नहीं है कि किसी बात को सिर्फ रटवाने की बजाय बच्चे को उसमें शामिल पैटर्न पहचानने में मदद की जाए? बच्चों के दिमाग़ में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल पैटर्नों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए आप कई गतिविधियां सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, बच्चों से दो–दो, चार–चार, पांच–पांच सेबों के समूह को पहचानने के लिए कहा जा सकता है। और फिर उनसे "चार–चार सेबों वाले कितने समूह हैं?", "ये कुल कितने सेब हुए?" जैसे सरल सवाल पूछे जा सकते हैं। और इस तरह की गतिविधि तरह–तरह की चीज़ों से की जा सकती हैं।

दोहराव रूचिकर व अलग–अलग तरीकों से होना चाहिए ताकि बच्चों को सीखने में रूचि बनी रहे।

प्रश्न आप बच्चों की पाँच–पाँच और दस–दस के समूह बनाने में मदद के लिए कक्षा में की जाने वाली किस तरह की गतिविधियाँ सोच सकते है?

जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाए, तब वे जो कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा में लिखने के लिए उनकी मदद की जा सकती है। जैसे, वे दो–दो सेबों वाले 4 समूहों को $4\times2 = 8$ लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं। अब बच्चे पहाड़ों में मज़े से पैटर्न ढूंढ पाने की स्थिति में होंगे। आप उनसे 10×10 को ग्रिड पूरा करने को कह सकते हैं। हर खाने में बच्चे को खाने की लाइन की संख्या और उसकी स्तम्भ की संख्या का गुणनफल भरना होगा। इस तरह की गतिविधि कुछ लम्बे समय तक की जा सकती है। बच्चों को या तो उतना समय दिया जा सकता है जितना उनको चाहिये या जितने समय तक उनकी रूचि गतिविधि में बनी रहे। उन्हें आपस में बात करने दें और पैटर्न खुद ही खोजने दें।

प्रश्न	यह देखने की कोशिश कीजिए कि अलग–अलग बच्चे किस क्रम में संख्याएं ग्रिड में भरते हैं। मेरा दावा है कि सभी बच्चे पहले एक, पाँच और 10 के सारे गुणनफल भरेंगे। आप मेरे इस दावे की जांच कीजिए। क्या आपको इस दावे को गलत साबित करने वाला कोई प्रमाण मिला।

ग	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

प्रश्न	क्या दोहराव के द्वारा बच्चों की समय की अवधारणा समझने में मदद की जा सकती है ? इसके लिए एक ऐसी गतिविधि को विस्तार से लिखकर बताइए जो पाँच बच्चों के एक समूह को दी जा सके।

2.6.3 बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं

एक दिन मैं पास के ही एक स्कूल में, शिक्षक और बच्चों के बीच किस तरह की परस्पर क्रिया होती है, यह देखने गयी थी। बच्चों को उनकी शिक्षक ने एक सवाल दिया हुआ था, और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। शिक्षक बच्चों के बीच घूम रही थी और रूक–रूक कर उनसे पूछ रही थी कि कोई एक जवाब उन्होंने कैसे निकाला। ऐसा करने में अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ हल मिटा दिया, चाहे वह सही था या गलत। आपने भी ऐसा व्यवहार देखा होगा। इससे क्या पता चलता है? क्या यह सवाल हल करने की अपनी क्षमता के बारे में आत्मविश्वास की कमी नहीं दिखाता हैं। आत्मविश्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है जब उनका किसी विशेषज्ञ से सामना होता है।

जिन बच्चों में सोचने की अपनी क्षमता पर भरोसा नहीं होता, उन्हें बाद में इस क्षमता को विकसित करने में दिक्कत होगी। इसलिए यह जरूरी है कि सीखने का माहौल ऐसा बनाया जाए जिससे बच्चों का आत्मविश्वास बढ़े।

लेकिन यह हम कैसे कर सकते हैं ? यदि समूहों में खेलते हुए बच्चों को आप ध्यान से देखें तो आपको शायद कुछ संकेत मिल जाए। बच्चे जब एक साथ खेलते हैं तो वे एक दूसरे की सोच जाँचते रहते हैं। खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक दूसरे से, बिना किसी डर के, एक आज़ाद और खुले माहौल में मेल–जोल का मौका मिलता है। ऐसे मेल–जोल के दौरान बच्चे अपनी बातों को एक दूसरे के सामने जवाबों और सुझावों के तौर पर रखते हैं। एक बच्चे के लिए दूसरे की बात की अहमियत इतनी ही होती है जितनी कि एक राय की होती है जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है, या नहीं भी।

दूसरी तरफ, कोई बड़ा, आम तौर पर बच्चों के सामने अपना मत एक "सच्चाई" के रूप में रखता है, जिसे बिना किसी सवाल या शक के मानना पड़ता है। यदि बड़े के कथन को कोई बच्ची शक से देखे या सोच में पड़ जाए, तो बड़ा अपने कथन को दोहराता है, पहले धीरज से, फिर चिड़चिड़ाकर, और अन्त में, गुस्से से। अंतिम निष्कर्ष होता है, "मूर्ख ! तुम यह भी नहीं समझ सकते !" बच्ची, जो पहले से ही यह समझती है कि वह बड़े के सामने कुछ भी नहीं है अपने बारे में यह राय मान लेती है, और उसका आत्मविश्वास कम होने लगता है।

इसीलिए, सीखने के लिए, बिना डर के आपसी मेल–जोल होना बहुत जरूरी है। इस तरह का मेल–जोल अन्य कारणों से भी महत्वपूर्ण है।

प्रश्न	क्या आप बच्चों के आपसी मेल–जोल और एक दूसरे से सीखने के और फायदे सोच सकते हैं?

यदि आप इससे सहमत हैं कि बच्चे एक–दूसरे से बहुत कुछ सीखते हैं, तो हम उन्हें ज्यादा से ज्य़ादा ऐसे मौके किस तरह दे सकते हैं? महत्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी परस्पर क्रियाएँ अनौपचारिक हों, मज़ेदार हों और बिना किसी डर के हों। एक बच्चे से सिर्फ यह कह देना कि, "तुम अपने पड़ौसी/दोस्त/भाई/बहन को पढ़ा दो" आम तौर पर कारगर नहीं होता। यह इसलिए क्योंकि तब बाल–शिक्षक बड़ों की नक़ल करने की कोशिश करता है, और सीखने वाला उतना ही घबरा जाता है जितना कि बड़े से।

बच्चे एक–दूसरे से सीख पाएं ऐसी स्वाभाविक और कुछ निकलने लायक परिस्थिति बना पाना आसान नहीं है। शायद, बच्चों को बिना उनकी जानकारी के, स्वाभाविक तरह से मिलते–जुलते खेलते, बात करते हुए देखना चाहिये। इससे शायद हमें कुछ तरीका समझ में आए कि कक्षा में ऐसी स्थितियाँ बनाई जा सकती है कि बच्चे एक दूसरे से सीख सकें।

प्रश्न	कुछ बच्चों की स्वाभाविक परस्पर क्रिया को देखने के बाद, इसकी वे विशेषताएँ लिखिये, जिनके कारण बच्चों का एक–दूसरे से सीखने का तरीका, अन्य तरीकों से बेहतर साबित होता है।

2.6.4 ग़लतियां उपयोगी होती हैं

बच्चों को पढ़ाने के दौरान आपने पाया होगा कि बच्चे तमाम ग़लतियां करते हैं। ग़लतियाँ होने पर आप क्या करते हैं? इनसे आपके बच्चे के बारे में क्या पता चलता है— सीखने में असफलता, या समझने की एक कोशिश? या दोनों? यदि ऐसा है, तो इन दोनों में अंतर कैसे करते हैं और कैसे तय करते हैं कि किसी ख़ास परिस्थिति में क्या है?

बच्चों की ग़लतियां उनकी सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और जरूरी हिस्सा है। नई अवधारणाओं को समझने की प्रक्रिया में बच्चे अपनी अभी तक की समझ को लागू करते हैं। हो सकता है कि यह औपचारिक शिक्षण के तरीके व विषयवस्तु से मेल न खाएँ।

बच्चों की गलतियां से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सोचते और सीखते हैं। जैसे, 51 के लिए 15 लिखना हमें यह बताता है कि बच्ची अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाई है, और उसे समूह बनाने का और करने की जरूरत हैं।

बच्चें की ग़लती को इस तरह से ध्यान से देखने से शिक्षक को सीखने वाले का गणितीय सोच विकसित करने में बहुत मदद मिल सकती है। गलतियां करना और उनसे सीखना एक पक्की समझ बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। बल्कि, यह सही उत्तर निकालने से ज्यादा महत्वपूर्ण है। दुर्भाग्यवश, परम्परागत शिक्षक अभी भी यही मानते हैं कि सीखना केवल तभी होता है जब सही उत्तर दिए जाएं।

प्रश्न	एक पांचवी की बच्ची "$3 \div - = - \frac{3}{2}$" में रिक्त स्थान में $\frac{9}{2}$ भरती है। आपके हिसाब से यह ग़लती क्यों हुई ? आप इस स्थिति को कैसे सुधारेंगे?

इसके साथ ही हम अपनी इस चर्चा के अंत में पहुंच गए हैं कि बच्चों के लिए सीखने का अच्छा माहौल किन–किन तरीकों से बनाया जा सकता है।

2.7 गणित एवं संज्ञानात्मक विकास

अपने आसपास के किन्हीं दो बच्चों के बारे में सोचें। क्या आप यह कह सकते हैं कि वे एक से हैं ? क्या वे सभी एक सी बातों को एक ही ढंग से सीखते हैं? हमारा स्वाभाविक उत्तर होगा कि ऐसा नहीं है बच्चे अलग–अलग ढंग से, अलग–अलग गति से और अलग–अलग संदर्भों में सीखते हैं किन्तु अगर ध्यान से देखे तो इस विविधता में कुछ पैटर्न भी होता है इस पैटर्न पर कई लोगों ने काम किया है और उसकी व्याख्या की है। पियाजे ने संज्ञानात्मक विकास (congnitive development) के पैटर्न को चार अवस्थाओं में बांटा है। यह अवस्थाएँ हैं– संवेदी क्रियात्मक (sensorimotor), पूर्व–संक्रियात्मक (pre-operational), मूर्त संक्रियात्मक (concrete operational), और औपचारिक संक्रियात्मक (formal operational)। इस के बारे में आपने बाल विकास के हिस्से में पढ़ा होगा। इन चारों अवस्थाओं में सामान्य तौर पर बच्चे क्या कर पाएंगे और क्या सीखने की स्थिति में होंगे इस पर काफी काम हुआ है। यह समझना महत्वपूर्ण है कि यह एक मोटा विभाजन है और इन अवस्थाओं को बच्चे में स्पष्ट रूप से अलग–अलग नहीं पहचाना जा सकता। हम सिर्फ मोटे तौर पर कह सकते हैं कि इस क्षेत्र में बच्चा सीखने की इस अवस्था में प्रतीत होता है। हम इस हिस्से में पूर्व संक्रियात्मक व मूर्त संक्रियात्मक अवस्था के बारे में गणित के संदर्भ में चर्चा करेंगे।

2.7.1 पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था

बच्चों में संज्ञानात्मक विकास की यह अवस्था आम तौर पर 2 साल तक से शुरू होकर 6 साल तक चलती है। इस तरह यह ज्यादातर बच्चों के लिए स्कूल जाने से पहले की अवस्था होती है। पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था में प्रमुख यह होता है कि परिस्थिति कैसी दिखती है। वे इस समय तार्किक क्रम में सोच नहीं पाते। जैसे– इस अवस्था के बच्चे आयतन अथवा वजन का संरक्षण नहीं कर पाते। वे सोचते हैं कि एक पतले लंबे गिलास से चौड़े छोटे गिलास में दूध डालने पर दूध की मात्रा कम हो जाती है। या एक लाइन जिस में चीजें फैली हैं जिससे लाइन की लंबाई बड़ी है उस लाइन में ज़्यादा चीजें हैं। इन दोनों उदाहरणों में बच्चों ने तुलना का आधार स्पष्ट दिखने वाली लम्बाई के गुण को लिया।

प्रश्न : आप भी दो और ऐसे उदाहरण दें, जिनमें बच्चे जो उन्हें दिखता है उसके आधार पर फैसले करते प्रतीत होते हैं।

बच्चे इस अवस्था में कुछ संख्याओं को भी थोड़ा–थोड़ा समझने लगते हैं, और रोज़ के अनुभवों में उनका इस्तेमाल शुरू करते हैं। उदाहरण के लिए, 2 साल की बच्ची 2 गेंदों और 3 गेंदों के समूहों में सिर्फ देखकर फर्क बताना सीखती है, ठीक वैसे ही जैसे वह मोटर गाड़ी और बस में फर्क बताना सीखती है। लेकिन वह 8 गाड़ियों और 9 गाड़ियों के समूह में फर्क नहीं कर पाती। इतने बड़े समूहों की तुलना करने के लिए उसे गिनती सीखनी पड़ेगी।

गिनती और चीजों का संरक्षण सीखने के मुकाबले बच्चे 'कम' या 'ज्यादा' पहचानना जल्दी सीख लेते हैं। ये **बच्चे पैटर्नों में सोचते हैं** और उन्हें आसानी से पहचान पाते हैं। ये बच्चे जो उस समय देख रहे होते हैं उसी पर ज्यादा भरोसा करते हैं। ये बच्चे तरह–तरह की आकृतियाँ पहचान तो सकते हैं पर उनकी हूबहू तस्वीर नहीं बना सकते। वे शब्दों के मुकाबले ज्ञात संदर्भों की तस्वीरों को 'पढ़ना' जल्दी सीखते हैं। ये बच्चे इन्सानों और जानवरों की तस्वीरें तो आसानी से पहचान लेते हैं लेकिन उतनी आसानी से वर्ग या त्रिभुज जैसी सरल आकृतियों को नहीं पहचान पाते। इसी तरह एक छोटी बच्ची जो एक जगह से दूसरी जगह तक पहुँचने का रास्ता याद रख सकती है और स्वयं वहाँ जा सकती है या आपको ले जा सकती है वह आसानी से रास्ते को समझा या चित्र बना कर दिखा नहीं सकती। वह रास्ते का चित्रण भी नहीं पढ़ सकती। उसके लिए ऐसे चित्रणों का परिप्रेक्ष्य समझना संभव नहीं होता। हालांकि उनकी स्थानिक संबंधों की समझ अच्छी होती है किन्तु वह जो सामने दिख रहा है उसी के संदर्भ में होती है।

अगर आप पूर्वस्कूली बच्चों को कुछ चीजें दें तो आपको यह जानकर हैरानी होगी कि वे कुछ हद तक बता सकते हैं कि वे चीजें कितनी हैं। हालांकि संख्या का संरक्षण वे काफी बाद में कर पाते हैं । इसके लिए चीजों की संख्या छोटी होनी होगी तो ही बच्चे संख्या बता सकते हैं। इसके लिए यह जरूरी नहीं कि उन्हें गिनती की जानकारी हो। इसलिए 4 या 5 तक **दृष्टि–बोधात्मक संख्याएं (perceptual numbers)** हैं, इन समूहों को बच्चे देख कर बता सकते हैं।

चित्र 8 : अगर मात्रा या आकार में बहुत साफ फर्क दिखाई देता है तो बहुत छोटे बच्चे भी यह समझ लेते हैं कि चीज़ों का कौन सा समूह बड़ा है।

स्थानिक समझ के बारे में और देखें तो आम तौर पर पूर्वस्कूली बच्चे एक साथ कई आकारों की तुलना नहीं कर पाते। वे एक बार में केवल दो ही चीजों की तुलना कर सकते हैं और 'कम' या 'ज्यादा' की धारणा समझ सकते हैं। लेकिन यह समझ पाना की किसी एक चीज की मात्रा दूसरी से तो कम है, पर तीसरी चीज से ज्यादा है, उनके लिए मुश्किल है वे 'ज्यादा, कम और उससे कम' भी नहीं समझ सकते। उनके लिए आकार सिर्फ बड़ा या छोटा होता है। बड़े व छोटे के बीच वह किसी आकार को नहीं रख पाते। इसीलिए वे चीजों को उनके आकार या लंबाई के हिसाब से सिलसिलेवार नहीं रख पाते, या घटनाओं को क्रमबद्ध नहीं कर पाते।

प्रश्न : मेरा एक तीन साल का दोस्त है। उसके पास खेलने के लिए बहुत सी छोटी गाड़ियाँ हैं। एक बार उसके साथ खेलते हुए, मैनें गाड़ियों को दो समूहों में बांट दिया। एक समूह में 14 गाड़ियाँ थी जिन्हें फैला कर रखा गया था, और दूसरे में 15 थीं जिन्हें पास–पास रखा गया था। जब उसे यह कहा गया कि वह ज्यादा गाड़ियों वाला समूह चुने, तो उसने सही समूह चुना। इस घटना के आधार पर आप किस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे? अपने चयन की वजह बताएं। साथ ही अन्य विकल्पों को नकारने के कारण भी दीजिए?

(क) वह 20 तक गिन सकता है।

(ख) वह बड़े समूहों को देख कर उनमें फर्क बता सकता है।

(ग) यह चयन सिर्फ एक इत्तफाक था, और वह यह काम दोबारा नहीं कर सकेगा।

(घ) वह गाड़ियों के समूहों के साथ तो यह कर सका, लेकिन और चीजों के साथ यह नहीं कर पाएगा।

जैसे जैसे बच्चे बड़े होते हैं, वे संख्याओं को सहज रूप से समझने की अवस्था से आगे बढ़ते हैं। अभी तक तो वे सिर्फ देखकर चीजों की संख्या पहचानते थे लेकिन बड़े होने पर उनका सोच भी पहले से ज्यादा विकसित होता है। पूर्व–संक्रियात्मक बच्चों में जो बड़े बच्चे हैं उनमें संबंध बनाने की और संबंध देखने की क्षमताएं विकसित करनी चाहिए जिससे कि उनकी गणितीय समझ बढ़े। इसका एक अच्छा तरीका है कि उन्हें ऐसे खेलों में लगाया जाए जिनमें थोड़ी सी ही चीजें हों, पर उन्हें उन चीजों में कुछ और चीजें 'जोड़नी' पड़े या उनमें से कुछ चीजें 'निकालनी' पड़े।

आइए अब इससे थोड़े बड़े बच्चों की क्षमताओं पर गौर करें।

2.7.2 मूर्त संक्रियात्मक अवस्था

प्याजे द्वारा दी गई संज्ञानात्मक विकास की परिकल्पना के आधार पर हम यह अपेक्षा करते हैं कि एक 6–7 साल का बच्चा जो छोटे–छोटे पत्थरों या अन्य चीज़ों से खेल रहा हो और खेलते–खेलते उसे एक लाइन में भी जमा रहा हो। तो कुछ ऐसा दृष्टांत सामने आ सकता है ''उसने पत्थरों को एक लाइन में रख कर उन्हें बायीं से दायीं ओर गिना। वे गिनती में 10 थे। फिर उसने उन्हें दायीं से बायीं ओर गिना। उसे बड़ी हैरानी हुई जब उसने पाया कि वे अभी भी गिनती में दस है। फिर उसने उन्हें गोल घेरे में रखा और पहले उन्हें वामावर्त गिना, फिर दक्षिणावर्त दिषा में। यह जानकर वह बड़ा ही खुष हुआ कि चाहे जैसे भी किया जाए, उनकी संख्या हमेषा दस ही रहती है। इस तरह उसने इस बात की खोज की कि रखने का ढंग बदल देने पर भी उनकी संख्या वही रहती है। इस प्रक्रिया में वह धीरे–धीरे अपने आप ही अपनी पहले

वाली धारणा को छोड़ रहा है। उसकी पहली धारणा के मुताबिक चीजों की संख्या इस बात पर निर्भर करती है कि उन्हें कैसे रखा गया है।

वह संज्ञानात्मक स्तर पर आगे बढ़ने के लिए तैयार हो रहा है। इस उम्र में वह यह भी समझ लेता है कि चीजों के एक समूह को यदि छोटे–छोटे उपसमूहों में बांट दिया जाए तो भी उनकी संख्या या मात्रा संरक्षित रहती है। पियाजे के अनुसार चीजों का संरक्षण बच्चा **मूर्त संक्रियात्मक अवस्था** में पहुँचने के बाद ही कर पाता है। संरक्षण की यह समझ जिसमें प्रक्रिया/विचार आदि को क्रमवार याद रखना व उन्हें कदम दर कदम उलट कर देख पाना संरक्षण के लिए आवश्यक है। उदाहरण के लिए एक चौड़े गिलास में रखा पानी पतले गिलास में डालने पर बढ नहीं जाता समझ पाने के लिए बच्चे को पानी की अभी की स्थिति को नज़रअंदाज करते हुए यह याद करना होगा कि पानी पहले कहाँ था। क्या उसमें कुछ जोड़ा गया है आदि। तभी वह कह पाएगा कि वापस उसी चौड़े गिलास में डालने पर उसका तल वही हो जाएगा जो पहले था। यह सब कर पाना इस अवस्था के बच्चे के सोच में एक अहम् बदलाव लाता है।

छह या सात साल की उम्र में बच्चे चीजों के दो समूहों को गिन कर उनकी तुलना कर सकते हैं। वे चीजों को जोड़ने और घटाने जैसे ज्यादा मुष्किल काम भी कर सकते हैं। यह संक्रियात्मक उनके सोच का स्वाभाविक हिस्सा बन रही होती है, लेकिन अभी भी वे अर्मूत स्तर पर नहीं सोच पाते। सात से दस साल के बच्चों की सोच मुख्य रूप से चीजों के साथ ही जुड़ी होती है। वे सरक्षण और गणित की अन्य मूल अवधारणाओं को सहज रूप से समझ सकते हैं लेकिन यह समझ मूर्त संक्रियाओं पर ही आधारित होती है। इसलिए पियाजे इस अवस्था को 'मूर्त संक्रियात्मक अवस्था' कहते हैं।

इसलिए अगर इस अवस्था के बच्चों को जोड़ने का सवाल दिया जाए तो वे समूहों की चीजों को गिनकर जोड़ना पसन्द करते हैं, न कि उनके संख्यांकों को। वे ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि उन्हें प्रतीकात्मक संक्रियाओं के मुकाबले अपनी सहज समझ और ठोस अनुभवों पर ज्यादा भरोसा होता है।

जैसे– छह साल की कविता ने घटा का सवाल इस तरह से किया–

$$\begin{array}{r} 31 \\ -16 \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$$

जब उससे पूछा गया कि यह उसने कैसे किया, तो उसने समझाया, ''6 में से 1 निकाला तो 5 बचे, और 3 में से 1 निकाला तो 2 बचे।'' यह पूछने पर कि क्या उसका जवाब सही था, उसने कहा कि उसे नहीं मालूम। लेकिन जब उसे कहा गया कि वह अपने तरीके से 31 में से 16 घटाये तो उसने सही जवाब (15) निकाला। उसने यह भी बताया कि उसने इस सवाल को अलग तरीके से हल किया। इसी तरह 8 साल का अमित भाग का सवाल (45÷3) नहीं कर सका, लेकिन 45 मिठाइयों को 3 लोगों में बराबर–बराबर आसानी से बांट सका। जोड़ने, घटाने में लाइन टैली लगा कर करना इसीलिए इस अवस्था के बच्चों के लिए आसान होता है। औपचारिक तरीकों से सीखने में अकसर ऐसे बच्चों को दिक्कत होती है। इस अवस्था के बच्चों के लिए औपचारिक तरीके अमूर्त होते हैं और उनकी अमूर्तताओं व विचारों के क्रम को याद रख पाने की क्षमताओं के हिसाब से कहीं ज्यादा अमूर्त होते हैं। अगर सवालों को बच्चों के जीवन के अनुभवों से सरल तरीके से जोड़ा जाए तो वे उन्हें सहज रूप से समझ पाते हैं, और उन को अपने उन तरीकों से हल कर लेते हैं, जो वे सामान्यतः इस्तेमाल करते हैं।

कई शोधकर्त्ता प्राइमरी स्कूल की शुरूआत में औपचारिक अंकगणित करने में बच्चों को मुष्किलों का एक और कारण बताते हैं। वे कहते है कि औपचारिक अंकगणित में भाग को छोड़ सभी संक्रियाएं दायीं से बायीं ओर की जाती हैं, जबकि संख्याएँ पढ़ना हो या हिन्दी या अंग्रेजी सभी बाएँ से दाएँ ओर पढ़ी जाती है। संख्या पढ़ने में तो पहले दाएँ से बाएँ आना होता है और फिर बाएँ से दाएँ उसे समझते हुए पढ़ना होता है। इस वजह से प्राइमरी स्कूल के कई बच्चे संक्रियाओं को बाईं से दाईं ओर कर देते है और संख्या को नहीं पढ़ पाते। इसलिए यह आवश्यक है कि बच्चों को अंकगणित सीखने के साथ–साथ यह भी अभ्यास हो कि किसी संख्या या चिन्ह की सही जगह क्या है।

प्रश्न : जो कुछ भी आपने अभी तक पढ़ा है, उसके साथ–साथ अपने अनुभवों के आधार पर बताएं कि नीचे दी गई अवधारणाओं को सीखने और समझने के लिए आम तौर पर बच्चे किस उम्र तक तैयार होंगे?

1. सरल वर्गीकरण
2. लंबाई का संरक्षण
3. गुणन में क्रमविनिमेयता, यानी कि $ab=ba$ किन्ही दो संख्याओं a और b के लिए।
4. समय
5. संयोग और प्रायिकता

विकास की अंतिम अवस्था, प्राइमरी स्कूल के बाद, यानी 11 साल के बाद होती है। इस अवस्था में बच्चे **औपचारिक संक्रियाओं** को लागू करने लग जाते हैं। अब वे चीजों या उनकी मात्रा को दिखाने के लिए प्रतीकों और शब्दों का इस्तेमाल कर सकते हैं। उनमें परिकल्पनात्मक कथनों को समझने, उनको इस्तेमाल करने और उनमें तर्क संगत संबंधों को खोजने की योग्यता भी आ जाती है। इस अवस्था में बच्चे की बीजगणितीय समीकरण, समानुपात चर, आदि अमूर्त अवधारणाओं को समझ पाने की क्षमता कुछ हद तक विकसित हो जाती है। यह विकास कितना हुआ यह बहुत सी बातों पर निर्भर करता है कि उसका औपचारिक संक्रियात्मक सोच कितना विकसित हो पाया है।

प्राइमरी स्कूल के बच्चों द्वारा गणितीय अवधारणाओं को सीखने में एक बड़ी दिक्कत यह है कि आम तौर पर उन्हें उन अवधारणाओं के अनुरूप मूर्त उदाहरण नहीं दिए जाते। प्राइमरी स्कूल के स्तर पर गणित सिखाने की जो पद्धति आजकल अपनायी जाती है, वह औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था के बच्चों के लिए ज्यादा सही है। लेकिन इस स्तर पर पहुँचने के लिए गणित की अवधारणाओं को सीखने और गणित में कुषलता हासिल करने के लिए बच्चों को सीखने के ठोस और अर्थपूर्ण अनुभव होने जरूरी होते हैं।

प्रश्न : बच्चों के बारे में नीचे दिए कथनों में से कौन से कथन सही है ? सही कथनों के लिए (√) और गलत के लिए (×) लिखें। अपने चयन के कारण भी दें।

(क) प्राइमरी स्कूल के अधिकां"ा बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं।

(ख) संख्या को समझने के लिए, बच्चों को वर्गीकरण और क्रम समझ में आना चाहिए।

(ग) पूर्व–संक्रियात्मक सोच प्राइमरी स्कूल के बच्चों का लक्षण है।

(घ) गणितीय समझ के विकास में, संरक्षण करने की क्षमता की एक मूलभूत भूमिका है।

इस भाग में हमने कहा है कि बच्चे उम्र के हिसाब से विकास की अलग–अलग अवस्थाओं में होते हैं। इसका यह मतलब यह नहीं कि 9 साल की बच्ची किन्हीं पहलूओं में भी औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था की क्षमता तक नहीं पहुँची हो सकती या 6 साल की कोई बच्ची पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था की क्षमता नहीं दिखा सकती। यह अवस्थाएँ व बच्चों को इनमें रखना मोटी समझ पर आधारित है। ऐसा नहीं है कि हर बच्चा हर पहलू में इस विवरण के आधार पर ठीक बैठे।

हम यह कह सकते हैं कि हालांकि सभी बच्चे मोटे तौर पर विकास की अवस्थाओं से एक ही क्रम में गुजरते हैं, लेकिन इसकी प्रक्रिया व गति हर बच्चे के लिए अलग अलग होती है। यह फर्क बच्चों के व्यक्तिगत गुणों, जैसे कि उनकी बौद्धिक क्षमता, रवैये आदि में फर्क के रूप में सामने आता है। अलग–अलग अनुभव, सामाजिक, आर्थिक और सांस्कृतिक परिस्थितियाँ भी क्षमताओं के विकास पर असर डालती है। यह एक आम बात है कि एक फेरी वाला 6 या 7 साल का बच्चा जल्दी से तीन–चार चीजों के दाम जोड़ लेता है या गांवों में लड़कियों में अनुपात, द्रव्यमान के संरक्षण और कई गणितीय अवधारणाओं की सहज समझ जल्दी बनती है क्योंकि वे कई काम करती है जिनसे उन्हें यह अनुभव मिलता है। यह बात उतनी ही उम्र के शहरी मध्यवर्गीय बच्चों या गांव के ही लड़कों पर लागू नहीं होती।

सामाजिक, सांस्कृतिक और आर्थिक पहलुओं के अलावा, मनोवैज्ञानिक पहलू से भी बच्चों के व्यवहार व क्षमताओं में विविधता होती है। यह बात उन तरीकों में अक्सर झलकती है जो बच्ची नई अवधारणाओं को समझने के लिए अपनाती है। उदाहरण के लिए, जोड़ सीखते वक्त शुरू में बच्चे 'सभी गिनने के' और कुछ बच्चे पहले से ही 'आगे गिनने का तरीका अपनाते हैं। जैसे–जैसे बच्चे बड़े होते जाते हैं वैसे–वैसे ही वे अधिक दक्ष तरीकों का इस्तेमाल करना सीखते रहते हैं। ज्यादा बड़े व अनुभवी बच्चों में से कुछ पांच–पांच के समूह बनाकर, तो कुछ तीन–तीन या दस–दस के समूह बना कर चीजों को गिनने लगते हैं।

प्रश्न : ''किसी गणितीय क्षेत्र में एक ही उम्र के बच्चे अलग–अलग संक्रियात्मक अवस्थाओं में हो सकते हैं और अलग–अलग उम्र के बच्चे विकास की एक ही अवस्था में हो सकते हैं।'' क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अगर हां, तो उदाहरणों से इस कथन की पुष्टि कीजिए। अगर नहीं, तो यह बताइए कि आप क्यों असहमत हैं।

हमें अपने घर के व कक्षा के बच्चों को ध्यान से देखना, समझना चाहिए और उस अवलोकन के आधार पर उनकी क्षमताओं की समझ बनानी चाहिए। यह तो ठीक है कि मोटे तौर पर उम्र के अनुसार क्षमता का अनुभव लगा सकते हैं किन्तु इस को बच्चे का अवलोकन कर ही ठीक से समझा जा सकता है। किसी भी वक्त पर आप बच्चों से जो भी करवाना चाहते हों या जो भी अभ्यास उन्हें देना चाहते हों, वे उस वक्त पर उनकी क्षमता के मुताबिक होने चाहिए। इसका अर्थ यह कि न तो वह उनके लिए अत्यधिक सरल हो और न ही ऐसे जिन्हें कर पाना ही संभव नहीं। वह उसकी तात्कालिक क्षमता से थोड़ा ही अधिक हो। इसका अर्थ यह है कि मूल संक्रियात्मक अवस्था में आने वाले बच्चे को ऐसे कार्य मिलें जो उसे अगले स्तर में जाने में मदद करें।

ये अवस्थाएं एक सीढ़ी के पायदानों की तरह हैं – हम एक पायदान पर कदम रख कर ही दूसरे पर चढ़ सकते हैं। हालांकि ये पायदान एक दूसरे से साफ तौर पर अलग भी दिखते हैं। किन्तु जैसा पहले भी कहा– यथार्थ में ये इतने अलग–अलग नहीं है। मिसाल के तौर पर, जब एक बच्ची गिनती का संरक्षण सीखने की कोषिष कर रही होती है, तो साथ ही साथ वह क्षेत्रफल या आयतन का संरक्षण भी सीख रही

होती है। साथ ही वह चीजों और संख्याओं को क्रमबद्ध करना भी सीख रही होती है। जब वह दो समूहों की तुलना एकैकी संगति से करने की कोि"ा"ा कर रही होती है, तो हो सकता है कि वह साथ–साथ गिनती भी सीख रही हो। इन अवस्थाओं की अहमियत सिर्फ इतनी है कि वे बच्चों को समझने में बड़ों की भी मदद करती हैं। साथ ही इनसे पाठ्यक्रम की विषय वस्तु और उसे पढ़ाने के ढंग को तय करने में भी मदद मिलती है।

एक ि"ाक्षक को सीखने वालों के विकास की अवस्था और उनके परिवे"ा के मुताबिक ही उन्हें सिखाना चाहिए व सिखाते समय बच्चों के विकास के आम पैटर्न की जानकारी के साथ–साथ व्यक्तिगत समझ भी रखनी चाहिए।

2.8 समेकन

इस इकाई में हमने समझा कि बच्चों के सीखने में उनके अनुभव, पृष्ठभूमि व उन्हें पहले से क्या आता है का ध्यान रखना आवश्यक है। सीखाने में ठोस अनुभवों के साथ शुरू करके धीरे–धीरे अमूर्तता के स्तर की ओर बढ़ने की जरूरत होती है। औपचारिक गणित को प्रतीकों से शुरू करना आवश्यक नहीं है। गणित सीखाने की प्रक्रिया में बच्चों को मजा देने वाले कई तरीके उपयोग किए जा सकते हैं। गणित की अवधारणाओं के बारे में बातचीत, उन्हें समझने में मदद करती है। हालांकि गणित सीखने में अभ्यास व दोहराव की आवश्यकता होती है, यह दोहराव उबाऊ होना आवश्यक नहीं है। दोहराव के सवाल नये ढंग के व सोचने को उकसाने वाले होने चाहिए। बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं। अतः कक्षा में उनके लिए आपकी बातचीत का मौका होना चाहिए। ऐसी परिस्थिति बने जहाँ वह अवधारणाओं पर अलग में चर्चा कर सकें, अपने अनुभवों व अपने सवालों को बाँट सकें और एक दूसरे से सीख सकें। गलतियाँ उपयोगी होती हैं, उन्हें ध्यान से देखना उनके बारे में सोचना व उन्हें सीखने के संदर्भ में समझना शिक्षण में मदद करता है। गलतियों पर सोच कर सीखने के रास्ते की समझ बनती है और सीखाने का रास्ता दिखता है।

2.9 प्रदत्त कार्य

1. गणित सीखने में भाषा का क्या महत्व है? उदाहरण देते हुए समझाएं।
2. गणित सीखने में बच्चे की पृष्ठभूमि व समझ का इस्तेमाल करने से क्या फायदा होगा? उदारहण देते हुए समझाएं।
3. गणित सीखने में अ–भ–चि–प्र की क्या आव"यकता है? एक उदाहरण देकर समझाएं।
4. औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की क्या जरूरत है?
5. बच्चे एक दूसरे से कैसे सीखते हैं? बच्चों के एक समूह का अवलोकन कर एस संबंध में एक प्रतिवेदन तैयार करें।
6. क्या गलतियां उपयोगी होती हैं? बच्चों द्वारा की गई कुछ गलतियों का उदाहरण देकर बताए कि वे गलतियां बच्चे के गणित सीखने में किस प्रकार उपयेगी हो सकती है?
7. गणित सिखाने में ओरिगॉमी किस प्रकार सहायता कर सकता है? दो उदाहरण देकर समझाइए।

इकाई–3
संख्या एवं संकियाएं

3.1 परिचय
3.2 सीखने के उद्देश्य
3.3 पूर्व अनुभव
3.4 गिनती कैसे सिखाएं?
3.4.1 गिनती करने का मतलब
3.5 संख्या पूर्व अवधारणाओं का विकास
3.6 संख्याओं की धारणा की समझ बनाना
3.6.1 वर्गीकरण
3.6.2 अनुक्रम बनाना (क्रम में रखना)
3.6.3 एक–एक की संगति
3.7 गिनती से परिचय
3.8 संख्या प्रत्यय की समझ का विकास एवं विभिन्न संकेतों के माध्यम से संख्याओं की प्रस्तुती
3.9 स्थानीय मान
3.10 गणितीय संक्रियाएं एवं उनमें अन्तर्सम्बन्ध
3.10.1 जोड़ की समझ का विकासः
3.10.2 घटाने की समझ का विकास
3.10.3 गुणा की समझ का विकास
3.10.4 भाग की समझ का विकास
3.10.5 संक्रियाओं में अन्तर्सम्बन्ध
3.11 सारां"ा
3.12 प्रदत्त काय

3.1 परिचय

जीवन का ऐसा कोई पहलू नहीं जहाँ संख्याओं की जरूरत नहीं पड़ती। संख्याएँ हमारे जीवन में इतनी घुली मिली है कि हम उनके बिना जीवन की कल्पना नहीं कर सकते। वैसे भी गणित विषय का नाम सुनते ही हमारे मस्तिष्क में संख्याओं का चक्र घूमने लगता है चुकिं संख्याएँ ही गणित के अध्यायों का मौलिक आधार है। अतः संख्याओं से संबन्धित मौलिक ज्ञान का होना अतिआवश्यक है। गणित के प्राथमिक विद्यालयी पाठ्यचर्या में संख्या की केन्द्रीय भूमिका है।

गणित की विभिन्न अवधारणायें चाहे वह संख्या या संख्यांक हो, दशमलव हो, भिन्न हो स्थानीय मान अथवा जोड़ घटाव, गुणा भाग इत्यादि हो, का उपयोग न केवल हम विषयी ज्ञान हासिल करने के लिए करते है । बल्कि जीवन की दैनिकचर्या में इनका उपयोग अभिन्न होता है, एक तरह की चीजों को समूह में

एक साथ रखना, प्रार्थना की लाइन में क्रम से खड़े होना तथा खेल में स्कोर गिनना इत्यादि क्रियाओं से बच्चे रोज ही रूबरू होते है। ये सभी गणित विषय के प्रत्यय यथा संख्या, अनुक्रम तथा गिनती है।

गणित विषय में संख्याओं की महत्ता को समझते हुए संख्याओं की दुनिया से बच्चों को प्राथमिक स्तर से ही समझ बढ़ाने की आवश्यकता है। इस इकाई में हम बच्चों में विभिन्न प्रकार की समझ विकसित करने के तरीकों से अवगत हो सकेंगे।

3.2 सीखने के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप–

- 'पूर्व संख्या अवधारणा' से अवगत हो सकेंगे।
- संख्या की अवधारणा को समझ सकेंगे।
- विभिन्न संकेतों के माध्यम से संख्याओं की प्रस्तुती की योग्यता का विकास कर सकेंगे।
- अंक तथा संख्या–निर्माण की क्षमता विकसित कर सकेंगे।
- गिनती एवं स्थानीय मान की अवधारणा से अवगत होंगे।
- गणितीय संक्रियाओं एवं उनके बीच के अंतर्संबन्धों की समझ बना सकेंगे।

3.3 पूर्व अनुभव

बच्चे विद्यालय मे प्रवेश लेने से पूर्व ही कम–ज्यादा, छोटा–बड़ा शब्दों का इस्तेमाल वस्तुओं के संदर्भ में करते हैं। जैसे–यह बड़ी गेंद है, ये गुब्बारा बड़ा है, आदि। बच्चे अपने परिवेश में अपने से बड़ों को गिनते हुये देखते–सुनते हैं। इससे प्रेरित होकर वे भी विभिन्न वस्तुओं को गिनने का प्रयास करते हैं। बच्चे प्रायः वस्तुओं को अव्यवस्थित या बिना क्रम से गिनते हैं जैसे एक, दो, पाँच, सात आदि। जब बच्चा एक बोलता है, तो शायद वह एक वस्तु को अलग न कर पाए अर्थात वे गिनने की प्रक्रिया में संगत वस्तुओ को अलग न कर पाएं। प्रथम कक्षा में गणित शिक्षण अधिगम की शुरुआत में बच्चो के इस पूर्व ज्ञान का लाभ उठाना चाहिए और बच्चों को क्रमिक रूप से मूर्त वस्तुओं के साथ गिनने के क्रियाकलापों मे संलग्न करना चाहिये।

3.4 गिनती कैसे सिखाएं?

सामान्यतया लोग यही समझते है कि बच्चे 1 से 10 या उससे आगे 100 तक की गिनती याद कर लें तो उन्हें संख्याओं का ज्ञान हो जाता है। इतना ही नहीं बच्चों द्वारा 100 तक की गिनती याद कर लेने पर हम दूसरों के सामने उसका प्रदर्शन करवाते हैं। लेकिन हम कभी इस बात पर ध्यान नहीं देते कि गिनती की किसी भी खास संख्या का मतलब बच्चा जानता है या नहीं। अगर गिनती सुनाते समय वह किसी संख्या पर अटक जाए तो वह गिनती सुनने वाले की तरपफ तो कभी अपने परिचित की तरपफ ताकने लगता है और वह अपनी इस अग्नि परीक्षा में तब सपफल हो पाता है जब हम चतवउचज करके उसकी मदद करते है। ऐसा करके हम न सिपर्फ बच्चे के सीखने की प्रक्रिया के साथ धोखा करते हैं बल्कि बच्चे के गणित

सीखने को बाधित करते हैं। अतः बच्चा आगे चलकर गणित से डरने लगे अथवा उसे कठिन समझने लगे अथवा गणित की कक्षा का तुरंत खत्म होने की प्रतीक्षा करे तो इसमें कोई आश्चर्य की बात नहीं होगी ।

इस नीरस, उबाऊ और कठिन तरीके से 'गिनती सिखाने' के बाद हम इसी ढंग से जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग और आगे चलकर भिन्न व द"ामलव भी सिखाते हैं। इस तरह जब हम सीखने की प्रक्रिया में से मज़ा निकाल देते हैं, तो कोई हैरानी की बात नहीं कि बच्चे गणित से डरने लगें।

3.4.1 गिनती करने का मतलब

एक बार माँ ने अपनी पाँच वर्षीय बेटी अन्या से किचेन से 11 चम्मच लाने को कहा अन्या ने बर्तन स्टैण्ड में रखे चम्मचों को 1 से 11 तक गिना और ग्यारह नम्बर वाले 1 चम्मच को ले आई और माँ को दे दिया । माँ द्वारा चम्मच की संख्या पूछने पर वह बोली– ग्यारह। माँ ने उसके द्वारा लाए गए चम्मच को गिनने के लिए कहा तो अन्या ने गिन कर बताया एक ।

- बताइए, अन्या को गिनती आती है या नहीं। क्या आप समझते है कि, अन्या को 1 से 100 तक की संख्याएँ क्रम से याद है या नहीं?
- आपके विचार से वह 11 चम्मच क्यों नहीं ला सकी?

इस गतिविधि को अपने पड़ोस में रहने वाले किसी चार वर्षीय बच्चे के साथ आजमाएं जो 1 से 10 तक की संख्याएँ सही क्रम में बोलता है, के सामने 10 गोलियाँ या कंकड़ रखिए और उन गोलियों/कंकड़ों को उंगली से छूते हुए बोलकर गिनने के लिए कहिए। गिनने के क्रम में उसे मत टोकिए अब निम्नांकित सवालों के संदर्भ में अपने अवलोकनों को दर्ज कीजिए –

1. क्या बच्चे ने सभी कंकड़ों पर उंगली रखी ?
2. क्या उसने कुछ कंकड़ों को एक से ज्यादा बार गिना ?
3. क्या उसने किसी कंकड़ को गिना ही नहीं ?
4. क्या सारे कंकड़ गिनने के बाद उसने पिफर से कंकड़ों को गिनना शुरू कर दिया ?
5. क्या सभी कंकड़ छू लेने के बाद भी वह गिनती करता रहा ?

इन अवलोकनों के आधार पर आप बच्चे की गिनने की प्रक्रिया के बारे में निष्कर्ष बताइए।

अगर ऊपर दिए गए सभी प्रश्नों के जवाब 'नहीं' है तो संभावना है कि बच्चे को दस तक की गिनती आती है । लेकिन एक या एक से ज्यादा प्रश्नों के उत्तर हाँ आने पर यह स्पष्ट है कि बच्चे को गिनती नहीं आती बल्कि उसे 1 से 10 तक की संख्या क्रम से बोलना आता है।

इसी प्रकार एक "िाक्षक का यह कहना है कि उसके विद्यालय के कई बच्चे गिनती बोल तो लेते हैं पर जब लिखना होता है तो वे संख्याओं की पहचान नहीं कर पाते। उनमें से कई को जब कहा जाता है कि जाओ इतनी वस्तुओं को ले आओ तो नहीं ला पाते हैं। उपरोक्त उदाहरणों से यह पता चलता है कि बच्चों की याद्दा"त तो अच्छी है क्योंकि वे गिनती बोलकर तो बता देते हैं तथा गिनने की क्षमता से हम यह समझ सकते हैं कि उसमें संख्या की अवधारणा का विकास भी किया जा सकता है।

प्र"न : आप कब कह सकते हैं कि बच्चे को गिनती की समझ हो चुकी है?

उदाहरण–1 में हमने देखा कि किस तरह बच्चे गलती करते हैं। इस परिस्थिति को पढ़ने के बाद आप बता सकते हैं कि कोई बच्ची संख्या तो अच्छी तरह बोल सकती है, पर उसने क्या गलतियां की होंगी? उसने निम्न तरह की गलतियां की होगी :

- एक ही चम्मच को बार–बार गिनना
- गिनते वक्त किसी चम्मच को छोड़ देना
- जोड़ और गिनती में अन्तर नहीं कर पाना
- चम्मच को बगैर छुए गिनती बोलना
- सभी चम्मच पूरे हो जाने पर भी गिनती बोलते रहना।

बच्चे ऐसी गलतियां क्यों करते हैं? इसे समझने के लिए हमें चम्मचों के ढेर में से स्वयं चम्मचों को गिनना चाहिए और गिनते समय हम जो चरण उठाते हैं, उन्हें ध्यान देना चाहिए।

एक शिक्षक द्वारा इस तरह की संपन्न गतिविधि से प्राप्त अवलोकन नीचे दिए गए है। आप अपने अवलोकनों से मिलान कीजिए और देखिए ये आपके अवलोकनों से कितने मिलते–जुलते हैं –

1. सर्वप्रथम शिक्षक ने गोलियों को एक लाइन में रखा ताकि गिनते समय कोई न छूटे और न ही दुबारा गिना जा सके। अर्थात् शिक्षक ने उन्हें एक क्रम में रखा ।
2. इसके बाद शिक्षक ने गोलियों को गिनने के लिए एक मान्य क्रम में संख्याओं का नाम बोलना शुरू किया और हर संख्या को क्रम में बोलते हुए क्रम में रखी गई गोलियों को छुआ। अर्थात् एक गोली को एक संख्या से जोड़ा यानी एक–एक की संगति बनाया।
3. जब शिक्षक ने दसवीं गोली को छुआ तो बोला 'दस' अर्थात दस का इस्तेमाल दसवीं गोली के लिए हुआ लेकिन उस समय सिपर्फ दसवीं गोली को ही छुआ गया था। दूसरी तरपफ दस का इस्तेमाल कुल दस गोलियों की कुल संख्या के लिए हुआ।
4. गिनती के बाद शिक्षक ने गोलियों को दो समूहों में वर्गीकृत किया । ऐसी गोलियों का समूह जो दस की संख्या में गिनी गई थी । दूसरा समूह बची हुई गोलियों का था।
5. शिक्षक ने एक बार पिफर दूसरी तरपफ से उपर की सारी प्रक्रिओं से गुजरते हुए दस तक गिना तो गिनी हुई कुल गोलियों के समूह में दस ही गोलियाँ थी। अर्थात् गिनती में दिशा क्रम बदलने से गिनती अप्रभावित रहती है ।
6. शिक्षक ने दूसरी बार गोलियों के बदले कंकड़ों का इस्तेमाल किया और दस तक की गिनती उपरोक्त प्रक्रिया के साथ संपन्न किया तो भी गिनती पूर्व की तरह संपन्न हुई। अर्थात् गिनती में किसी भी वस्तु का प्रयोग हो सकता है । यह आवश्यक नहीं कि वह वस्तु एक ही तरह की हो।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि गोलियों को गिनने में मुख्य रूप से चार अलग–अलग प्रक्रियाओं से गुजरना पड़ता है फिर दो अन्य पूरक प्रक्रियाओं से।

गिनने में मुख्य प्रकियाएं निम्नलिखित हैं :

- एक मान्य क्रम में रखना
- वर्गीकरण करना
- एक–एक की संगति करना
- एक ही संख्या को दो अलग–अलग अर्थों में इस्तेमाल करना

गिनने में दो अन्य प्रक्रियायें

- गिनती किसी भी दिशा से हो सकती है ।
- गिनती में किसी भी वस्तु का इस्तेमाल हो सकता है। यह आवश्यक नहीं कि वस्तु समान ही हो।

यहां पर दो अन्य प्रक्रियाएं भी दी गयी हैं। इन प्रक्रियाओं पर अगर हम चर्चा करें तो हम यह पाते हैं कि बहुत सी बार हम यह जानने का प्रयास नहीं करते हैं कि बच्चे को वस्तुओं को छांटना या क्रम में रखना आता भी है या नहीं? हम उसे कोई गिनती एक–दो वस्तुओं की सहायता से करके देते हैं, परन्तु यह नहीं सोच पाते कि उसमें एक–एक की संगति बन भी पाई है या नहीं। इसी उलझन में बच्ची 11 चम्मच लाने की जगह 11वीं चम्मच उठा लाता है तथा कहती है कि मैंने तो सही गिनती बोली थी। इसमें गलती कहां हुई है?

इन सभी उपर्युक्त उदाहरणों को पढ़कर हमें यह तो समझ आ गया कि जब तक बच्चों को यह नहीं समझाया जाये कि वस्तु व संख्या समान नहीं है, तब तक उन्हें एक–एक की संगति समझ में नहीं आ सकती।

प्र"न : आपको क्या लगता है कि उपर दी गयी प्रक्रियाएं गिनती सिखाने के लिए सही हैं? इसपर अपने विचार को लिखिए और अध्ययन केन्द्र पर सबके साथ साझा करें।

प्र"न : नीचे लिखे कथनों में कौन सही है और कौन गलत ? गलत वाक्यों को सही करने के लिए आप क्या बदलाव करेंगे ?

1. यदि कोई बच्चा गिन नहीं सकता, तो वह संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोल ही नहीं सकेगा।
2. यदि कोई बच्चा गिन ंनहीं सकता, तो संभव है कि वह यह नहीं समझ पाया हो कि दी गई वस्तुओं और संख्याओं के नामों की जोड़ी कैसे बनाई जाए ?
3. जब कोई बच्चा पाँच चीजों की संख्याओं के नामों के साथ जोड़ी बना ले तो इसका मतलब है कि वह पाँच शब्द का उपयोग दोनों अर्थो में कर सकता है।
4. गिनने के लिए किसी खास दिशा की आवश्यकता होती है ।
5. गिनना सीखने से पहले किसी भी बच्चे को वर्गीकरण क्रम में रखने तथा एक–एक की जोड़ी की समझ का ंहोना आवश्यक है ।
6. गिनती के लिए समान वस्तुओं का होना जरूरी है ।

हमने उपर्युक्त उदाहरणों की सहायता से विभिन्न प्रकार के बिन्दुओं पर चर्चा की तथा हमारी यह समझ तो बन ही चुकी है क गिनती गिनने का मतलब यह नहीं है कि बच्चों में संख्या की समझ विकसित हो चुकी है। गिनती सीखने से पहले उन्हें वर्गों में बांटना, क्रम में रखना और एक–एक की संगति मं जमाना कुछ हद तक आना चाहिए। इसीलिए इन क्षमताओं को संख्या पूर्व अवधाणाएं कहा जाता है।

3.5 संख्या पूर्व अवधारणाओं का विकास

हमने अभी गिनती का मतलब जाना और यह भी सीखा कि बच्चों को अवधारणाएं सीखने से पहले उन्हें उस अवधारणा को टटोलने व अनुभव करने का पर्याप्त अवसर मिलना चाहिए। उन्हें कुछ करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। सामान्यतः बच्चे गिनती या संख्या सीखने के पहले कम ज्यादा, उपर–नीचे, दूर–पास और बड़ा–छोटा, आदि से परिचित होते हैं। प्रारंभिक स्तर पर हम अक्सर यह देखते हैं कि बच्चे संख्या, गिनती का मतलब नहीं समझ पाते हैं, उदाहरण के लिए मेरे एक मित्रा के बच्चे से तेरह लिखने के लिए कहा गया तो उसने 31 लिखा। कक्षा में शिक्षण करते समय बच्चों से ऐसे अनेक उदाहरण सामने आते रहते है। अक्सर कक्षाओं में यह भी देखा जाता है कि बच्चे किसी लिखे हुए संख्या जैसे 8 को नहीं पढ़ पाते अथवा इसका मतलब नहीं समझ पाते है जबकि उन्हें ऐसी संख्याओं का ज्ञान होना चाहिए। ऐसे ही जब किसी बच्चे से 1039 में 3 का मतलब पूछा जाता है तो इनका जवाब यथोचित नहीं होता अर्थात उन्हें 3 के स्थानीय मान का ज्ञान नहीं होता है । हालाँकि वे अंको को पहचानना अथवा पढ़ना जानते होते हैं।

ऐसी स्थिति में हम शिक्षक हताश होकर या तो शिक्षण में अरूचि दिखाने लगते है ंअथवा बच्चों को डाँटना शुरू करते हैं। इसके साथ ही हम ऐसा भी करते हैं कि हम स्वयं ही बच्चों को उनके सवालों का जवाब दे देते हैं या कार्य को खुद ही निपटा देते है। इससे बच्चे स्वयं तर्क करने व जवाब खोजकर निकालने से वंचित रह जाते हैं। जबकि हमें इस बात को समझने की कोशिश करनी होगी कि ''आखिर बच्चे किसी प्रत्यय को क्यों नहीं समझ पा रहें हैं'', क्या हमने ऐसी गतिविधियों की प्रस्तुति उनके समक्ष की है जिससे प्रत्यय विकास के अवसर सृजित होते हों? या क्या हमें स्वयं संबन्धित उदाहरण की ठीक–ठीक समझ नहीं है।

3.6 संख्याओं की धारणा की समझ बनाना

आज ज्यादातर शिक्षकों की यह स्थिति है कि उनका ध्यान सिपर्फ संख्याओं को याद कराने पर ही केन्द्रित होता हैं। ज्यादातर शिक्षकों का यह विश्वास है यदि बच्चे संख्याओं के नाम गिनती के क्रम में बोलना सीख जायें तो इसका मतलब है कि वे गिनना या संख्याओं को जान गए हैं। जबकि बच्चों में संख्या की समझ धीरे–धीरे ही विकसित होती हैं। अतः संख्या का अर्थ समझने के पहले आवश्यकता इस बात की है उनमें 'वर्गो में बाँटना', 'क्रम में रखना' तथा 'एक–एक की संगति बनाना' जैसी क्षमताओं का विकास किया जाए ।

अब हमें इस बात पर गौर करना है कि बच्चे में वर्गीकरण करने, क्रम में रखने और एक–एक संगतिकरण करने की क्षमता का विकास करने के लिए क्या–क्या किया जा सकता है? अगर एन.सी.एफ. और बी.सी. एफ. को ध्यानगत किया जाय तो हम रचनावादी उपागम के आधार पर बच्चों के सीखने के लिए मज़ेदार गतिविधियों द्वारा अवधारणाओं को खोजने का मौका दे सकते हैं।

आइए, हम पहले ऐसी कुछ गतिविधियों पर विचार करें जिनसे बच्चों में समूहीकरण / वर्गीकरण की क्षमता विकास करने में मदद मिल सके। इन गतिविधियों को आप अपनी कक्षा के अनुरूप ढालकर भी इस्तेमाल कर सकते हैं।

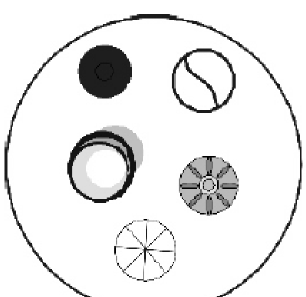
3.6.1 वर्गीकरण

जैसा कि हम जानते हैं कि जब वस्तुओं को उनके एक ही प्रकार के गुणों के आधार पर साथ–साथ रखा जाता है तो इसे वर्गीकरण या समूहीकरण कहते हैं। (किसी बच्चे को वर्गीकरण आ गया, यह तभी कहा जा सकता है जब वह वर्गीकरण की कसौटी का निर्णय कर सके और गतिविधि के दौरान इस कसौटी को बनाए रख सके) और यही क्षमता तार्किक अवधारणाओं के विकास की बुनियाद है।

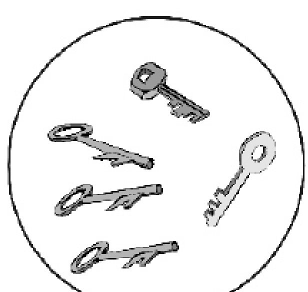
बच्चे रोजमर्रा के कामकाज में अक्सर वर्गीकरण का प्रयोग करते हैं। उदाहरणतः इन्हें फूल, अनाज, बर्तन, कटे हुए कागज, खिलौने इत्यादि अलग–अलग रखने के लिए कहा जाता है तो वे वर्गीकरण तो करते ही है। लेकिन वर्गीकरण की अवधारणा को विकसित करने के लिए बच्चों की ऐसे और अनुभवों की जरूरत पड़ती है। खेल इसका अच्छा माध्यम हो सकता है।

आप ि"ाक्षण के क्रम में बच्चों में वर्गीकरण की समझ को विकसित करने के लिए निम्नलिखित गतिविधियां कर सकते हैं।

1. **वग शिक्षण करने के क्रम में:** बच्चों को तरह–तरह की सामग्री खेलने के लिए दें। खेलते वक्त वे अपने आप उन चीजों को व्यवस्थित करने के तरीकों के बारे में सोचते हैं। हो सकता है कि उनके द्वारा किया गया वर्गीकरण हमें अटपटा सा लगे। किन्तु बगैर झुंझलाए हुए हम यह सोचें कि इन्हें अलग–अलग सामग्री अपने ढंग से एक जगह संग्रहित करने का मौका मिल रहा है। बच्चों द्वारा वस्तुओं को अलग–अलग समूह में किये जाने पर उनका अवलोकन कीजिए तथा बातचीत कीजिए कि उन्होंने वस्तुओं के इस तरह के समूह क्यों बनाए?
2. बच्चों को कुछ परिचित चीजें देकर उन्हें समान गुण के आधार पर समूहों में बाँटने के लिए दें। जैसे– आकृति, रंग या सतह की बनावट आदि के आधार पर शुरू में स्वयं समान गुण वाली चीजों का एक समूह बच्चों को बनाकर दिखाएँ।



आकार के आधार पर समूह



बनावट के आधार पर समूह

खिलौनों का समूह

3. बच्चों को तरह–तरह की पत्तियाँ, कंकड़, दाल, गेंद, पेन देकर उन्हें समूहों में बॉटने को कहें । समूह निर्माण के बाद उनसे पूछे इन्हें साथ–साथ क्यों रखा गया है ? इसे दूसरे समूह में क्यों नहीं रख सकते हैं? आदि।
4. बच्चे जब मध्यार्िभोजन कर रहे हों तो उनसे पूछें –कौन सी चीजें मीठी है और कौन सी नमकीन?
5. स्वयं कुछ चीजों को गुणों के आधार पर वर्गीकृत कर दें तथा उनसे पूछें – इन्हें किन गुणों के आधार पर समूहों में रखा गया है ?

प्र"न : आप स्वयं ऐसी दो गतिविधियों का निर्माण करें जिनसे बच्चों में वर्गीकरण की क्षमता का विकास करने में मदद मिले।

3.6.2 अनुकम बनाना (कम में रखना)

चीजों को क्रम में सजाने का अर्थ होता है, उन्हें किसी नियम के आधार पर क्रम में रखना। इसे हम गणित की भाषा में पैटर्न बनाना भी कहते हैं। यह आकृति, आकार, रंग या ऐसे ही किसी गुण के आधार पर हो सकता है।

कम बनाने का एक खास तरीका होता है। जैसे–आप बच्चों को कुछ चीजें देकर उन्हें उनके घटते/बढ़ते हुए वनज के आधार पर कम में रखने के लिए कहें या कुछ छड़ियां देकर उन्हें घटती/बढ़ती हुई लम्बाई के आधार पर कम में रखने के लिए कहें।

जैसा कि हम पहले पढ़ चुके हैं कि कम में रखना एक पैटर्न बनाना भी होता है। तो हम यह भी कह सकते हैं कि क्रम बनाने का सबसे आसान तरीका यह भी है कि किसी पैटर्न को आगे बढ़ाने के लिऐ कहा जाय। जैसे– एक पंक्ति में एक पेंसिल, एक पेन, एक पेंसिल, एक पेन, एक पेंसिल................ के क्रम में पेंसिल एवं पेन रखकर उनसे पेंसिल व पेन के ढ़ेर से वैसी ही एक और पंक्ति बनवाएं।

प्र"न : बच्चों के समक्ष अगर अनुक्रम संबंधी गतिविधियाँ करते समय 'पहली' आखिरी, पहले वाली, 'बाद वाली' जैसे शब्दों का इस्तेमाल किया जाए तो इसका क्या प्रभाव होगा?

कुछ करें:

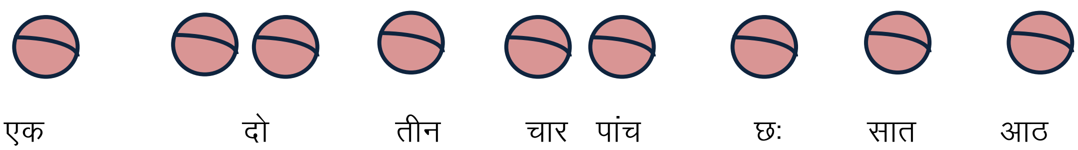
- स्वयं एक–एक गतिविधि सुझाइए जिनसे बच्चे आकार, वजन या किसी अन्य गुण के आधार पर अनुक्रम बनाएँ ।
- आपकी समझ से संख्या ज्ञान से पहले पूर्व संख्या अवधारणाओं की समझ बनाना क्यों आवश्यक है?
- आप इन अवधारणाओं का अभ्यास करते हैं– अगर हाँ तो कैसे ?

आपने उपर दिए गए बिन्दु के आधार पर एक गतिविधि बनाई। इससे यह उभरता है कि बच्चों को दिए जानेवाले हर काम में जिन तार्किक प्रक्रियाओं की जरूरत होती है, उसकी स्पष्ट समझ हमें होनी चाहिए। खासतौर से जब हम बच्ची से अनुकम बनाने की उम्मीद करें, तो हमें पहले यह पता कर लेना होगा कि क्या वह दो दि"ााओं में कम लगा सकती है?

अनुक्रम सम्बंधी गतिविधियां करते वक्त 'पहली', 'आखिरी', 'इससे पहले' जैसे शब्दों का इस्तेमाल करने से बच्चों को इन अवधारणाओं को समझने में मदद मिलती है।

3.6.3 एक–एक की संगति

एक ि”क्षक ने 12 गेंदे एक कतार में रख दी और चार वर्षीय रेखा को गिनने के लिए कहा। ि”क्षक ने उसे कहा कि गिनते हुए वह गेंदों को छूती जाये। रेखा ने गेंदों को तीन बार गिना और हर बार अलग–अलग जवाब आया। हो यह रहा था कि गिनते वक्त वह या तो किसी गेंद को छोड़ देती या किसी गेंद को दो बार गिन लेती थी। उसकी गिनती गेंदों के साथ कुछ इस प्रकार की थी –



प्र”न : आपको क्या लगता है कि रेखा ने गिनती इस प्रकार से क्यों की?

रेखा अभी इस बात को समझ नहीं पायी है कि गिनते वक्त किसी वस्तु को अछूता नहीं छोड़ते तथा अगर किसी वस्तु को एक बार छू लिया तो उसे वापस नहीं छूआ जाता। अर्थात रेखा को अभी एक–एक की संगति की अवधारणा बाकी है।

इस अवधारणा की समझ बनाने के लिए हमें बच्चों को कई अवसर देने होंगे जिनमें वे वस्तुओं को एक–एक की संगति में रखें।

एक–एक की संगति की समझ के तहत बच्चों को बहुत थोड़े 'से ज्यादा' से कम' 'बराबर' जैसे शब्दों का मतलब समझाना होता है।

ळम एक–एक की संगति का अपने दैनिक जीवन में भी निरंतर उपयोग करते रहते हैं। हमें हमारे अनुभवों को और विस्तार देने की जरूरत है। इसी उद्दे”य से यहां पर कुछ गतिविधियां दी गयी हैं :

1. पेंसिलों की एक कतार बनाकर बच्चों से कहें कि वह उतनी ही पेनों को एक कतार बनाए ।
2. बच्चों से यह कहें कि वह उतनी ही पत्तियाँ इकट्ठा करें जितने की समूह में कुल बच्चें हैं।
3. कुछ बिल्लियों और कुछ चूहों के चित्राों का एक–एक समूह बना लें। अब बच्चों से कहें कि एक–एक बिल्ली को एक लाइन के जरिये एक–एक चूहे से जोड़ दें।
4. बच्चों को संग्रहों को पहचानने का अनुभव कराएँ। संग्रहों की तुलना करने की धारणा को तीर–आरेख खींच कर बताएँ ।

ऐसी गतिविधियों से बच्चे यह देख और समझ पाएंगे कि एक–एक की संगति का अर्थ क्या है। हमें उन्हें इसलिए भी प्रोत्साहित करना चाहिए कि गतिविधि के दौरान वे आपस में सम्बंधित प्र”न करें तथा उनका जवाब खोजने का प्रयास करें।

प्र”न : इस गतिविधि को पढ़े और अपने अध्ययन केन्द्र पर करें। अपने अध्ययन केन्द्र पर सभी प्रतिभागी मिलकर तीन समूह बना लीजिए । प्रत्येक समूह परिवेश से अलग–अलग वि”ाषता वाली पाँच वस्तुएँ ले आइए। गोलाकार समूह में अलग–अलग बैठ जाइए। अब समूहवार निम्नांकित क्रियाकलाप कीजिए –

समूह क्रियाकलाप

- एकत्रित वस्तुओं से आकार के आधार पर वस्तुओं को वर्गीकृत करें
- किसी अन्य गुण के आधार पर वस्तुओं का अलग–अलग समूह बनाएँ।
- एकत्रित वस्तुओं को लंबाई के आधार पर घटते हुए क्रम में सजाइए ।
- वस्तुओं को घटते हुए वजन के आधार पर जमाइए।
- वस्तुओं को एक बड़ी एक छोटी, एक बड़ी एक छोटी................ के पैटर्न में सजाएँ।
- एक समान गुण वाली वस्तुओं के समूह तैयार करें। एक समूह की वस्तुओं को दूसरे समूह की वस्तुओं के साथ एक–एक के मिलान के माध्यम से किस समूह में ज्यादा तथा किस समूह में कम वस्तुएँ है? बताएँ

प्र”न : क्या भाषा न समझ पाने के कारण बच्चे द्वारा किए जाने वाले कार्य में बाधा आती है? इसे स्पष्ट करने के लिए कोई उदाहरण दीजिए।

प्र”न : आपके विद्यालय में मध्याहन भोजन देने की घंटी बजती है। घंटी में आवाज सुनते ही बच्चों की बहुत बड़ी भीड़ रसोई घर के सामने लग जाती है। ऐसी स्थिति में आप बच्चों को कैसे व्यवस्थित करते हैं?

3.7 गिनती से परिचय

जसवंत चार वर्ष का था। वह संख्याएँ बोल रहा था। वह संख्याएँ कभी तो क्रम में बोलता और कभी जो याद आ गयी वह। उसकी मम्मी पास ही बैठकर घर का काम कर रही थी। उन्होंने जसवंत से पूछा, ''क्या तुम चार लिख सकते हो?'' जसवंत ने हाँ कहा, और निम्नानुसार लिख दियाः–

4 0000

मम्मी ने पूछा कि यह साथ में क्या बनाया है तो जसवंत बोला, ''गेंद''। जब मम्मी ने पूछा कि गेंदे क्यों बनायी, तो जसवंत ने जवाब दिया, ''किताब में चार ऐसे ही लिखा है''। मम्मी ने ''**4** X X X X'' जब लिखकर पूछा कि क्या यह चार है, तो जसवंत नहीं बोला।

इस उदाहरण से हमें यह तो पता चल ही गया कि जसवंत को इस बात की समझ नहीं थी कि चार, चार वस्तुओं के किसी भी समूह पर लागू हो सकता है। तब क्या हम कह सकते हैं कि उसे संख्या का अर्थ पता है? वैसे तो वह 1 से 10 तक संख्याएँ लिख सकता है।

जैसा कि हम पहले पढ़ चुके हैं कि गिनने का मतलब क्या होता है? जब कोई बच्चा गिनती लिख लेता है तो इसका मतलब यह नहीं कि उसे गिनती करना आता है और यह उपर दिये गये उदाहरण से स्पष्ट होता है।

बच्चों में गिनती या गिनने की क्षमता विकसित करने में चीजों से सचमुच मदद मिलती हैं, वह है वास्तविक चीजों की गिनती। बच्चे को दों पत्तियाँ, दो पेंसिलें, दो किताबें दिखाकर, दो बार ताली बजाकर या इसी तरह की गतिविधियों से 'दो' का अर्थ समझने की कोशिश करने दें। हर बार शब्द 'दो' पर जोर दें। इन विविध अनुभवों से बच्चे धीरे–धीरे समझेंगे कि दो–दो चीजों के इन सारे समूहों में एक बात समान है, और वह समान बात है 'दो' का गुण।

इस तरह से हम उन्हें पाँच तक की संख्याएँ सिखा सकते हैं। कोई जरूरी नहीं कि ये संख्याएँ क्रम में ही सिखाई जाएँ। मसलन, बच्चे इन संख्याओं को 'एक', 'दो', ''पाँच'', ''तीन'', ''चार'' के क्रम में सीख सकते हैं। संख्याओं की परंपरागत क्रम वे बाद में सीख सकते हैं। इससे उन्हें छोटी और बड़ी संख्याओं की समझ बनाने में मदद मिलेगी। हर बार हम उनसे ऐसे प्रश्न पूछ सकते हैंः ''मेरे पास कितने कंचे हैं?'', मैं कितनी बार कूदी ?'', कौन से चार बच्चे बोर्ड पर आएँगे?'', वगैरह।

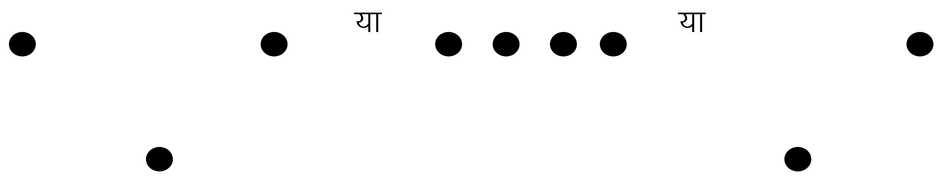
लेकिन एक चेतावनी! बच्चों को दिखाने के लिए गिनते वक्त हम अक्सर एक–एक चीज को छूते हुए 'एक, दो, तीन', वगैरह कहते जाते हैं। वे देखते हैं कि आप इन चीजों को छू रहे हैं और हर चीज चीज के लिए एक नया शब्द बोल रहे हैं। हो सकता है कि वे समझें कि एक, दो, तीन, आदि, उन चीजों को नाम हैं, जैसा कि ऊपर दिए गए उदाहरण 2 में हुआ था। हम बच्चों को यह कभी नहीं समझाते कि दूसरी चीज को 'दो' इसलिए कहते हैं क्योंकि हम वास्तव में दो चीजों के एक समूह की बात कर रहे हैं– एक चीज वह जो हमने पहले छुई थी और एक वह जिसे अब छू रहे हैं। चूँकि हम इस बात को समझते हैं, इसलिए हम मानकर चलते है कि बच्चे भी इसे समझ गए हैं। दरअसल हमें तो आभास तक नहीं होता कि बच्चे चक्कर में पड़ रहे हैं।

इस भ्रम से बचने का तरीका यह है कि अलग–अलग अवसरों पर अलग–अलग क्रम में तरह–तरह की चीजों या क्रियाओं को गिनने का अभ्यास करवाया जाएँ। हम यह भी कर सकते हैं कि पहली चीज को छूकर कहें, ''यह एक पत्ती हुई''ए और इसके बाद इस पत्ती को अलग रख दें। फिर दूसरी पत्ती को उठाकर पहली के साथ रख दें और कहें, यह एक और पत्ती है, यानी अब ये दो पत्तियाँ हो जाने चाहिए। यही अभ्यास क्रियाओं के साथ भी किए जा सकते हैं। जैसे आप एक दफा ताली बजाकर कहें, ''मैंने एक बार ताली बजाई''। फिर दो बार ताली बजाकर कहें, ''अब मैंने दो बार ताली बजाई''। इस तरह से जाहिर हो जाता है कि संख्या के नाम का संबंध उस वस्तु या क्रिया विशेष से न होकर उस समूह के आकार से है, जिसे हम अलग किया है। इससे बच्चे को यह समझने में भी मदद मिलती है कि संख्याओं का एक क्रम होता है तथा आगे आने वाली हर संख्या, पिछली संख्या से एक ज्यादा होती है।

संख्याओं के संदर्भ में एक और पहलू है जिसे ध्यान में रखना जरूरी है। गिनती सिखाने के लिए चीजों का इस्तेमाल करते वक्त हम चीजों को हर बार एक खास पैटर्न में जमा देते हैं। मसलन, हम ज्यादातर दो कंचों को ऐसे ● तीन कंचों को ऐसे ●●● और चार कंचों को ऐसे ●● ●● रखते हैं। हो सकता है कि बच्चे को यह गलतफहमी हो जाएँ कि दो, तीन, चार आदि का संबंध चीजों की उस खास सजावट से है और इस तरह हो सकता है कि बच्ची ●● को दो कंचे बताएँ। यदि हम जमाने के तरीके को बदलते रहें, तो इस समस्या से बच सकते हैं। तीन चीजें दिखाते समय कभी उन्हें एक पंक्ति में तो कभी तिकोनी रहें, तो इस समस्या से बच सकते हैं। तीन चीजें दिखाते समय कभी उन्हें एक पंक्ति में तो कभी तिकोनी सजावट में रखा जा सकता है। इसी प्रकार से चार चीजों को कई तरह से रखा जा सकता है–

●

● ●



प्रश्न : एक महिला अपनी तीन वर्षीय बच्ची को 1 से 5 तक गिनती सिखा रही थी। इसके लिए वह बच्चों की अंक संबंधी किताब का इस्तेमाल कर रही थी। इस किताब में हर संख्या के सामने उतनी ही टॉफी बनी बनी हुई थी जैसे–

1			
2			
3			

मां किसी संख्या और उसके सामने बनी टाफी की ओर इ”ाारा करती और संख्या का नाम बोल देती। बच्ची मां के शब्दों को ज्यों का त्यों दोहरा देती। कुछ दिनों बाद जब बच्ची से कहा गया कि किताब में चार बताए तो उसने सही–सही बता दिया। क्या उस बच्ची ने एक से पांच तक की संख्याओं का अर्थ समझ लिया? आपके विचार में, इस तरीके से सिखाने में क्या समस्याएं हो सकती हैं?

3.8 संख्या प्रत्यय की समझ का विकास एवं विभिन्न संकेतों के माध्यम से संख्याओं की प्रस्तुतो

उदाहरण : पहली कक्षा में शिक्षक ने बोर्ड पर अंक 1,.......,9 लिखे थे। इसके बाद उन्होंने सभी बच्चों से प्रत्येक अंक से संबंधित संख्या के नाम दोहराने को कहा था और आखिर में उन्होंने सभी बच्चों से होम–वर्क पुस्तिका में कई बार ये अंक लिखवाए थे। इसके कुछ महिने बाद शिक्षक ने उन्हें दो अंक वाली संख्याएँ सीखाने इस तरह शुरू किया। सबसे पहले उन्होंने बच्चों को एक अंक वाली संख्याएँ याद दिलाई। इसके बाद उन्होंने बोर्ड पर लिखा–

10

11

12

.

.

19

उन्होंने जो भी लिखा था, बच्चों ने उसे ठीक वैसा ही उतार लिया। अब शिक्षक ने एक–एक संख्यांक की ओर इशारा करते हुए संख्याओं के नाम बोलना शुरू कर दिया। आखिर में उन्होंने बच्चों से हरेक संख्यांक पाँच–पाँच बार लिखवाए। साथ में कहती गई,'' 1 के साथ 0 लिखो दस, 1 के साथ 1 लिखो ग्यारह,..........1 के साथ 9 लिखो, उन्नीस।''

थोड़े और अभ्यास के बाद वे संतुष्ट हो गए कि बच्चे 1 से 100 तक के संख्यांक व संख्यानाम जानते हैं। अगले साल इसी तरह से बच्चों को सिखाया गया कि 101 से 1000 तक की संख्याओं को कैसे दर्शाएँ। दूसरी कक्षा के शिक्षक ने उन्हें यह भी बताया है कि यदि उन्हें कोई संख्या, जैसे एक सौ बावन लिखने को कहें, तो पहले वे अपनी कॉपी में सै., द., ई., लिख लें। उन्होंने यह भी समझा दिया कि यहाँ सै, द., ई., का अर्थ सैंकड़ा, दहाई, इकाई होता है। चूँकि एक सौ बावन में एक सैकड़ा, पाँच दहाई और दो इकाई हैं, इसलिए बच्चे सै. के नीचे 1, द. के नीचे 5 और इ. के नीचे 2 लिखें।

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें दो व तीन अंकों की संख्याएँ लिखने की काफी कवायद करवाई। शिक्षक ने ब्लैकबोर्ड पर कुछ उदाहरण देकर इसे समझाया।

इसके बाद बच्चों को निम्नलिखित किस्म के सवाल गृहकार्य के लिए दे दिए : 251 में कितनी दहाई है?

ज्यादतर बच्चों को जवाब था 5, मगर एक बच्चे ने कहा 25 है।

प्रश्नः आपके ख्याल से जवाब में ये अलग–अलग अंतर क्यों आए होंगे?

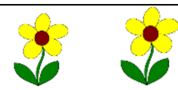
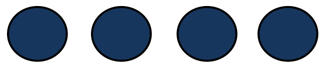
हममें से कई लोग इकाई, दहाई, सैंकड़ा की अवधारणा काफी मशीनी ढंग से सिखा देते हैं। इस तरीके से सिखाए जाने पर बच्चे कह देते हैं कि 251 में 5 दहाई हैं। हमें थोड़ा गहराई में जाकर, कुछ ठोस गतिविधियों के इस्तेमाल से बच्चों को याद दिलाना चाहिए कि आखिरकार एक सैंकड़ा भी 10 दहाई के बराबर होता है, वगैरह। तभी वे यह समझ पाएँगे कि 251 में 25 दहाई है।

प्रश्न : ऊपर दिए गए तरीके से सिखाए जाने के बाद एक बच्ची 203 को तेईस पढ़ती है। उसे अपने गलती का अहसास कराने के लिए आप क्या गतिविधियाँ सुझा सकते हैं।

हम जानते हैं कि गणित एक अमूर्त विषय है और इसकी अमूर्तता इसके सभी हिस्सों में झलकती है। हम जिन बच्चों के बीच रहते हैं, वे अमूर्त अवधारणाओं को तभी सीख पाते हैं जब उनका मूर्तीकरण कर उनके सामने प्रस्तुत किया जाय। अतः संख्या की धारणा स्पष्ट करने के लिए हमें बच्चों से परिचित ऐसी ठोस वस्तुओं के संकेत लेने होंगे जिससे हम संख्या की अमूर्त अवधारणा को स्पष्ट कर सकें।

सामान्यतया हम शिक्षक गिनती सिखाने के क्रम में चीजों का इस्तेमाल करते समय चीज़ों को हर बार एक खास क्रम/पैटर्न में रखकर संख्या–भान कराते हैं। जैसे हम ज्यादातर कंकड़ों, तीलियों या गोलियों से एक को स दो को सस तीन को ससस चार को सससस के रूप में रखते हैं। जबकि हमें संख्या लिखते समय संकेतों के एक ही पैटर्न को हर बार नहीं दुहराना चाहिए।

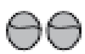
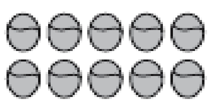
बच्चों को संख्या की धारणा स्पष्ट करने के लिए हम तरह–तरह की परिचित वस्तुओं का इस्तेमाल कर सकते हें। साथ ही यह भी ध्यान रखने की ज़रूरत है कि संख्याओं के नाम पहले विशेषण के रूप में आएँ न कि संज्ञा के रूप में–

	= एक किताब
	= दो फूल
	= तीन पेंसिल
	= चार गोलियाँ

ठोस वस्तुओं और इनके समूह के माध्यम से हमें बच्चों में अलग–अलग संख्याओं का ज्ञान कराना चाहिए।

संख्या एवं संख्यांक :

संख्याओं के लिए प्रयुक्त चिह्न या संकेतों को संख्यांक कहते हैं, जैसे– संख्या एक का संकेत 1 तथा दो का संकेत 2 है। साथ ही जिस संख्या या संख्यांक का विचार हमारे मस्तिष्क में आ रहा हो उस संख्या या संख्यांक को शब्दों में लिखने या बोलने को उस संख्या या संख्यांक का नाम कहते हैं, जैसे– संख्यांक 2 का संख्यानाम 'दो' तथा संख्या संकेत 3 का संख्यानाम 'तीन' तथा संकेत 4 का शब्दों में नाम 'चार' कहलाता है।

संख्या	संख्यांक	संख्यानाम
	2	दो
	3	तीन
	4	चार
–	–	–
–	–	–
	10	दस

प्र”न : इस गतिविधि को अपनी कक्षा में कराएं।

कक्षा–कक्ष में उपलब्ध चीजों की तरपफ इशारा करते हुए बच्चों को संख्या भान कराएँ, जैसे– हमारे वर्ग कक्ष में 1 टेबल, 2 दरवाज़े, 3 खिड़कियाँ, 4 कोने, आदि हैं। बच्चों की तरपफ इशारा करते हुए लड़के और लड़कियों की संख्यानुसार संख्या का भान कराइए। इस गतिविधि से प्राप्त निष्कर्षों का लिखिए।

हमने जसवंत के उदाहरण में देखा कि वह किस तरह गलती करता है। अब उसकी मम्मी ने सोचा कि अपने बेटे को उसी तरह अंक पद्धति समझाऊँ जैसे कि मेरे एक मित्र ने अपने बच्चों को समझाया था। मैंने जो किया, वह यह था :

उदाहरण : मैंने अपने बेटे को ढेर सारे मोती दिए और दिखाया कि उससे वह 10–10 मोतियों के समूह कैसे बनाए। फिर मैंने उसे दिखाया कि वह 10 मोतियों के एक समूह को एक पंक्ति में रख सकता है और

उन्हें एक लड़ी कह सकता है। जब वह कुछ लड़ियाँ बना चुका तो मैंने उसे बताया कि 10 लड़ियों की एक माला बना सकता है।

उसने मोतियों से लड़ियाँ तथा मालाएँ बनाना शुरू किया और धीरे–धीरे अपने दिमाग में माला व लड़ी का आपसी संबंध बनाता गया। थोड़ी देर बाद मैंने उससे पूछा कि एक माला के बदले में वह कितनी लड़ियाँ देगा। कुछ देर सोचकर वह बोला, ''10''।

तब मैंने उससे पूछा कि 107 मोतियों से वह कितनी मालाएँ बना सकता है? उसने कुछ देर सोचने के बाद कहा, ''10 लड़िया, और 7 मोती बचेंगे।'' मैंने पूछा, '' तो मालाएँ कितनी बनेंगी?'' उसकी मदद के लिए मैंने उससे 107 मोती लेकर अधिक से अधिक जितनी मालाएँ बन सकें, बनाने को कहा। शर्त यह है कि एक माला में 10 लड़ी हों और हर लड़ी में 10 मोती हों। तो उसने एक माला बनाई और 7 मोती बच गये।

फिर मैंने उससे पूछा कि इस बात को वह कैसे लिखेगा? हम दोनों ने मिलकर एक प्रणाली बनाई जिसमें हमने मा./ल./मो. लिख लिया–मालाओं की संख्या (मा.) के नीचे, लड़ियों की संख्या (ल.) के नीचे तथा मोतियों की संख्या (मो.) के नीचे लिखना था। मा. के नीचे उसने 1 लिखा और मो. के नीचे 7 लिखा। मैंने पूछा, ''लड़ियों की संख्या का क्या होगा?'' उसने जवाब दिया, ''लड़ियाँ तो है ही नहीं।'' तो मैंने उससे पूछा कि इस बात को कैसे दर्शाएगा। थोड़ी देर सोचने के बाद ल. के नीचे उसने 0 लिख दिया।

अब मैंने मा. ल. मो. के ऊपर सै.द.ई. लिख दिया और उससे पूछा कि क्या यह ठीक है? उसने थोड़ा सोचा और फिर कहा कि यह ठीक है क्योंकि 100 मोतियों की एक माला है और 10 मोतियों की एक लड़ी। मैंने कहा, बढ़िया! और तब बताओ 429 कितना होग? उसने फौरन जवाब दिया, ''4 माला 2 लड़ी और 9 मोती ।'' तो ये कितनी मोती होंगे?'' ''चार सौ उन्तीस'' उसका जवाब था।

इस तरह के चन्द और सवालों के बाद हमने एक खेल खेला। मैंने उसे 3 अंक दिए। उसे करना यह था कि उनकी मदद से जितनी संख्याएँ बना सकें बनाए। इन संख्याओं को घटते क्रम में रखना भी था। जब मुझे लगा कि उसे इस खेल में मजा आ रहा है, तो मैंने चार अंक दे दिए। उसने इनकी मदद से सारी संभव संख्याएँ बना डाली। यहाँ तक की 0, 1, 2 व 9 अंक देने पर उसने 0129 जैसी संख्या भी बनाई। मुझे अहसास हुआ कि ऐसी बातों को सीखने के लिए बच्चों को पूरा समय दिया जाना चाहिए। उन पर कोई दबाव नहीं होना चाहिए और यह एक अच्छा मौका था कि वह यह सब कर सकें।

अलबत्ता, यह जरूरी होता है कि बच्चे को किसी अवधारणा के इस्तेमाल का मौका बार–बार दिया जाए। ऐसा इसलिए है क्योंकि हो सकता है कि किसी एक वक्त पर बच्चे उस गतिविधि को कर पाए। मगर इससे यह नहीं मान लेना चाहिए किय वह इसे बाद में भी दोहरा पाएगा। इसलिए मैंने हफ्ते–दस दिन बाद यह गतिविधि तथा इसी मकसद से दूसरी गतिविधि, उसके साथ दोहराई। इस दौरान मैंने उसे कई ऐसे अभ्सास दिए जिनसे उसे सै. द. इ. के उपयोग के मौका मिल पाए।

प्रश्न : बच्चों को सै., द., ई का अभ्सास करवााने के लिए एक और गतिविधि सोचिए। खासकर ऐसी गतिविधि सोचिए जिसके दौरान बच्चे ऐसे संख्यांकों से सामना करें, जिनके एक या ज्यादा अंक हों।

प्रश्न : एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जो 50 बच्चों की एक कक्षा में सै., द., इ. को सिखाने के लिए उपयोगी हो। गतिविधि ऐसे संख्यांकों को लेकर हो जिनमें कम से कम एक अंक शून्य हों।

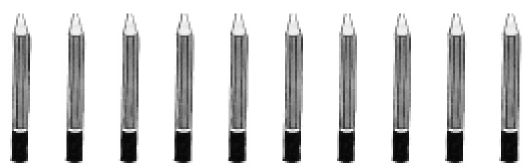
आओ सीखी गई संख्यानुसार बच्चों से खेल खेलाएं–

खेल (बाल भाई कितने, आप चाहें जितने) : बच्चों में गोलाकार खड़ा करें। एक बच्चे को गोलाई के बीच खड़ा करें। निर्देश दें– बीच में खड़ा बच्चा बोलेगा– बोल भाई कितने, सभी बच्चे गोलाई में घुमते हुए बोलेंगे– आप चाहें जितने, इतना सुनकर बीच में खड़ा बच्चा कोई संख्या बोलेगा। इस संख्या के अनुसार बच्चों के अलग–अलग समूह बना लेंगे। जैसे–अगर 20 बच्चों का समूह है और बीच वाला बच्चा '5' बोलता है तो सभी बच्चे 5–5 के अलग समूह बना कर खड़े हो जाएँगे। इस तरह यह खेल आगे भी जारी रखिए तथा कुछ संख्याओं के अनुसार समूह बनवाइए।

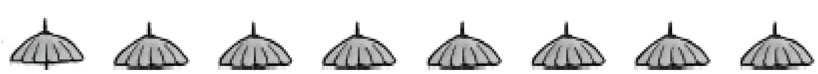
प्र"न : एक बड़े चार्ट पेपर पर कुछ आकृतियाँ बनाइए और निर्देश लिखिए। अपनी कक्षा के बच्चें को बारी–बारी से बुलाकर निर्देशानुसार हल करइए।

तीन बोतलों का मुँह बन्द कीजिए।

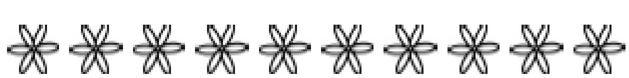
पांच गेंदों को क्रास (×) कीजिए।



छः पेंसिलों की नोक बनाइए।



सात छातों में डंडी बनाइए।



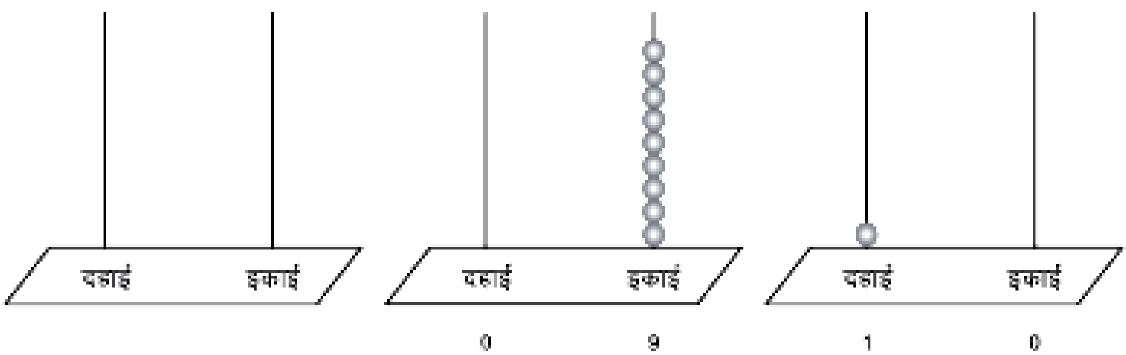
दस फूलों की डंडी बनाइए।

प्र"न : आपके विद्यालय में उपलब्ध ि"क्षण संदर्"िका (एल.एफ.एम.) में संकेतों के माध्यम से संख्याओं की प्रस्तुति के सम्बंध में सुझाए गए ि"क्षण तकनीकों का अवलोकन कीजिए तथा इस पर एक समीक्षात्मक रिपोर्ट तैयार कीजिए।

3.9 स्थानीय मान

हम तो यह जान ही गये हैं कि हम संख्याओं को प्रतीकों के माध्यम से व्यक्त करते हैं। हमारी अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में 1 से 9 एवं 0 को प्रतीकों के रूप में इस्तेमाल किया जाता है। संख्याओं के निरूपण के लिए हम इन दस प्रतीकों का ही प्रयोग करते हैं। जिन्हें हम अंक के नाम से जानते हैं। अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में दाशमिक प्रणाली की यह विशेषता है कि हर अंक का मान संख्या में उसके स्थान पर निर्भर करता है। अतः दाशमिक प्रणाली में बड़ी से बड़ी संख्या की बहुत छोटे रूप में व्यक्त की जा सकती है। अन्तर सिपर्फ अंकों के स्थान का होता है।

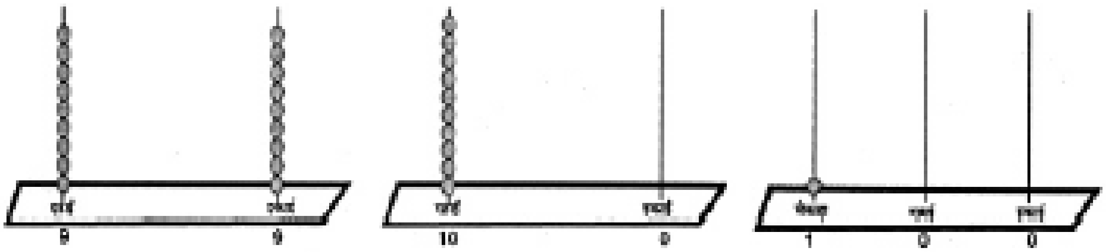
ऐसा इसलिए संभव हो पाता है क्योंकि हम हर स्थान का मान अलग–अलग निर्धारित करते हैं। अंकों के ये मान ही 'स्थानीय मान' कहलाते हैं। स्थानीय मान की अवधारणा स्पष्ट करने के लिए हम गिनतारे का प्रयोग कर सकते हैं। हम गणना करने के लिए दहाइयों द्वारा समूहन का प्रयोग करते हैं। अतः अब हम नौ के साथ एक और जोड़ देते हैं तो 'संपूर्ण समूह' एकल इकाई के रूप में परिवर्तित हो जाती हैं जिसे 'दहाई' के नाम से जानते हैं जबकि संख्या के पहले स्थान का अंक इकाई कहलाता है।



जैसा कि ऊपर दिए गए चित्र में द"र्ाया गया है। गिनतारा में इकाई के स्थान पर 9 मोती लगे हुए हैं। जैसे ही हम 9 में एक मोती और जोड़ते हैं, वह 10 हो जाते हैं। उस स्थिति में दहाई के स्थान पर एक मोती तथा इकाई पर कोई मोती नहीं रहता। अर्थात 9 में एक जोड़ने पर 'दस की संख्या' एकल इकाई अर्थात दहाई के रूप के परिवर्तित हो जाती है। क्योंकि हमारी संख्या पद्धति में दहाइयों द्वारा समूहन का प्रयोग होता है इसलिए इस प(ति का आधार 'दस' मानते हैं।

संख्यांकों को आगे बढ़ाने के लिए जोड़ प्रणाली का प्रयोग किया जाता है। जैसे– ग्यारह दस से एक ज्यादा होता है और इसका प्रतीक है–11, बारह में ग्यारह से एक ज्यादा होता है और इसका प्रतीक है–12, तेरह में बारह से एक ज्यादा होता है और इसका प्रतीक है–13।

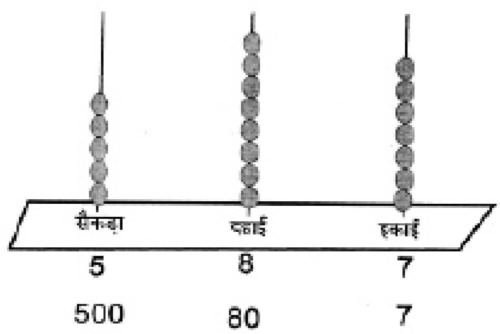
दूसरे शब्दों में हम यह भी कह सकते हैं कि 13 में दस से तीन अधिक होता है। इस क्रम को बढ़ाते हुए हम निन्यानवे तक जा सकते हैं। पिफर निन्यानवे से एक ज्यादा होने पर हम देखते हैं 'दस' के 'दस समूह' बन जाते हैं। और इस प्रकार 'दस के समूह' में दस समूह पिफर एकल इकाई के रूप में परिवर्तित हो जाती है जिसे हम सौ कहते हैं और इसके प्रतीक या 'संख्यांक' को '100' के रूप में जानते हैं। जैसा कि निम्न रूप से द"र्ाया गया है–



इस प्रकार हम देखते हैं कि दस इकाईयाँ मिलकर एक दहाई बनाती है और दस दहाईयाँ मिलकर सैकड़े के रूप में परिवर्तित हो जाती हैं। इसी प्रकार दस सैकड़े मिलकर हज़ार, दस हज़ार मिलकर दसहजार तथा दस, दस हजार मिलकर लाख बनाते हैं। और फिर यह क्रम आगे चलता रहता है।

उदाहरण :

587 में 5, 8 और 7 के स्थानीय मान गिनतारे की सहायता से–



इस प्रकार 587 में 5 का स्थानीय मान = 500

8 का स्थानीय मान = 80

तथा 7 का स्थानीय मान = 7 है।

प्रत्यक्ष या अंकित मान :

किसी संख्यांक में किसी अंक का जो वास्तविक मान है, वही उसका अंकित या प्रत्यक्ष मान है तथा संख्यांक 587 में 5, 8 एवं 7 के प्रत्यक्ष मान इन संख्याओं का प्रत्यक्ष मान के बराबर ही है।

क्या आप बच्चों में इकाई, दहाई और सैकडें की समझ विकसित करनें के लिए कोई और गतिविधि का उपयोग कर सकते हैं? कैसे?

प्र”न : नीचे दिए गए स्थानीय मान सारणी का अवलोकन करें।

करोड़		लाख		हजार				
दस	एक	छस	एक	दस	एक	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10,0000000	1,0000000	10,00000	1,00000	10,000	1,000	100	10	1

क्या हम इस स्थानीय मान चार्ट के आधार पर किसी संख्यांक में सम्मिलित अंको के स्थानीय मान का निर्धारण कर सकते हैं। अपने विचारों को तर्कों की सहायता से स्पष्ट करें।

उपरोक्त सवाल में जो स्थानीय मान का जो चार्ट दिया गया है। आइए अब हम समझे कि उसका इस्तेमाल कैसे किया जा सकता है।

3546 में सभी अंकों के स्थानीय मान को चार्ट में निम्न प्रकार से द"र्ााया जा सकता है:

करोड़		लाख		हजार				
दस	एक	छस	एक	दस	एक	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10,0000000	1,0000000	10,00000	1,00000	10,000	1,000	100	10	1
					3	5	4	6

स्थानीय मान चार्ट के अनुसार संख्यांक 3546 में प्रत्येक अंक का स्थानीय मान उसके द्वारा ग्रहण दिए गए स्थान के कारण होता है। अतः 3 का स्थानीय मान 3000, 5 का स्थानीय मान 500, 4 का स्थानीय मान 40 तथा 6 का 6 है।

हम इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$\underline{3\times1000}+\underline{5\times100}+\underline{4\times10}+6$ अथवा

3000 + 500 + 40 + 6

इस प्रक्रिया को हम 3546 का विस्तारित रूप कहते हैं।

प्र"न : यहां पर कुछ प्र"न दिए जा रहे हैं। इन पर अपने विचारों को स्पष्ट कीजिए।:

1. 56 में 5 और 6 के स्थानीय मान को आप कैसे समझाएंगे?
2. 254 में आप 2 और 5 के स्थानीय मान को कैसे समझाएंगे?
3. 3935 में आप 3,4,और 5 के स्थानीय मान को कैसे समझाएंगे?
4. 3671 को विस्तारित रूप में लिखने का क्या मतलब है?समझाइए।

यहां पर उपर केवल दा"ामिक प्रणाली के बारे में ही बताया गया है। इसके अतिरिक्त द्वि–आधारी प्रणाली, पंच–आधारी प्रणाली तथा साठ–आधारी प्रणाली होते हैं। द्वि–आधारी प्रणाली का उपयोग कम्प्यूटरों में, पंच–आधारी का अबेकस में तथा साठ–आधारी प्रणाली का उपयोग समय व कोण द"र्ााने में किया जाता है।

3.10 गणितीय संक्रियाएं एवं उनमें अन्तर्सम्बन्ध

मुके"ा घर पर आकर गणित के सवाल हल कर रहा था। उसे गणित विषय अच्छा लगता है। वह आज खड़े जोड़ के कुछ सवाल कर रहा था। वह निम्न जोड़ कर रहा था–

5 3		6 8
+ 3 4	तथा	+ 4 5
....		....

पहला सवाल उसने आसानी से हल कर लिया, जैसा ि"ाक्षक ने उसे कक्षा में सिखाया था (3 + 4 = 7 तथा 5 + 3 = 8) और नीचे 87 लिख दिया परन्तु दूसरे सवाल को वह हल नहीं कर पाया। उसने 8 और 5 के नीचे 13 तथा 6 व 4 को नीचे 10 लिखकर बताया कि इनकी जोड़ 1013 है। अब आप सोचिए कि सात साल की कोई बच्ची 68+45 की जोड़ नहीं कर पाती, इसके क्या कारण हो सकते हैं।

आपके सोचने की प्रक्रिया में एक कारण यह भी हो सकता है कि वह जोड़ की प्रक्रिया में शामिल किसी एक या अधिक अवधारणाओं एवं कौ"ालों को नहीं समझ पाई है। हमने इसके पूर्व संख्याओं, संख्यांकों, गिनती व स्थानीय मान से सम्बंधित अवधारणाओं की चर्चा की है। अब हम जोड़ने, घटाने, गुणा और भाग संबन्धी अवधारणाएं विकसित करने के लिए गतिविधियों पर आधारित रूचिकर तरीकों की चर्चा करेंगे। चारों संक्रियाओं के परस्पर सम्बंध पर चर्चा करने के साथ–साथ यह भी जानने का प्रयास करेंगे कि कक्षा में इन अवधारणाओं को सिखाने के दौरान बच्चों के मन में कौन–सी गलतफहमियां पैदा होती है।

प्र"न : कक्षा 2 या 3 में पढ़ रहे बच्चों से जोड़ने व घटाने के कुछ सवाल बनवाइए। इन सवालों में कुछ सवाल खड़े व कुछ आड़े रूप में रखिए। अवलोकन कीजिए कि वे इन समस्याओं को हल करने के लिए कौन–कौन से तरीके अपनाते हैं। बच्चों द्वारा अपनाए गये तरीकों को नोट कीजिए। साथ ही, यह भी पता करने की को"ि"ा कीजिए कि इन्हें हल करते समय उन्हें कौन–कौन सी दिक्कतें आई और उन्होंने किस तरह की गलतियां की?

यहां पर हम शुरू की समझ के विकास के तरीकों और घटाने के संदर्भ में बातचीत करेंगे। अंत में हम गुणा व भाग पर विचार करेंगे। इस दौरान हम इस बात पर भी जोर देंगे कि बच्चों के साथ इन संक्रियाओं की शुरूआत ठोस वस्तुओं की जरिये की जानी चाहिए।

3.10.1 जोड़ की समझ का विकासः

प्रतिदिन के जीवन में जोड़ से हर किसी को पाला पड़ता है। बच्चे भी खाते–खेलते, जाने–अनजाने जोड़ (समूहों को मिलान) की संक्रियाएँ करते रहते हैं। हम चाहेंगे कि बच्चे इससे संबन्धित अवधारणाओं और भाषा समझ जाएँ। इस उद्देश्य की पूर्ति कैसे करें? इसके लिए शुरू में बच्चों को ठोस अनुभवों की ज़रूरत होती है। जैसे बच्चे को 2 पत्ते और 3 पत्ते देकर कह सकते हैं, ये 2 पत्ते हैं और ये 3 और पत्ते हैं तो बताओ कि कुल कितने पत्ते हैं।'' इसी तरह की क्रिया गोली, टॉफी, बिस्कुट, बटन, पत्थर आदि से संख्या बदल बदल कर करा सकते हैं, पर ध्यान रहे कि बच्चे संख्या तथा वस्तु का नाम साथ बोले। जैसे 5 गोलियाँ, 3 टॉपफी आदि। शुरू में शिक्षक उसकी मदद के लिए सवाल पूछ सकते हैं, जैसे तुम्हारे पास कितने बिस्कुट थे? मैंने तुम्हें कितने बिस्कुट और दिए? कुल कितने बिस्कुट हुए?

जब बच्चे अपने द्वारा की गई क्रिया का वर्णन करते हुए बोलने लगे कि ''2 गोलियाँ और 3 गोलियाँ बराबर 5 गोलियाँ'' तब शिक्षक बता सकते हैं कि इस क्रिया को जोड़ना कहते हैं और 2+3=5 को बोर्ड पर लिख सकते हैं। इसी तरह के कई उदाहरण के बाद बच्चा 3+2=5 को जानने लगता है।

वस्तुओं के समूहों को मिलाने के कापफी अनुभवों के बाद ही बच्चे जोड़ के गुण समझ पाते हैं। जैसे– 3 + 2 = 5 या 2 + 3 = 5

5 = 3 + 2, 1 + 4 = 2 + 3 आदि

उदाहरण : जोड़ की समझ बनाने में खेलों की भूमिका भी महत्वपूर्ण हैं। एक f"k्षक दो बच्चों कोया दो टोलियों को पासे और पत्थर दे देते हैं, हर बच्चा या टोली के द्वारा पासा फेंका जाता है और पासे पर आनेवाली संख्या के बराबर पत्थर उठा लेती है। दो मर्तबा करने के बाद जिसके पास ज्यादा पत्थर होते हैं, वही विजेता।

''3 पत्थर और 5 पत्थर बराबर 8 पत्थर''

इसी तरह f"k्षक या f"kक्षिका और भी गतिविधियां करते हैं। जिसमें वह विभिन्न चित्रों का उपयोग करते हैं। वह बच्चों को एक कार्ड देते हैं जिस पर तीन चिड़ियाएं एक डाल पर बैठी हैं और कहते हैं कि इस पर दो चिड़िया और आकर बैठ जाती है तो कौन सा कार्ड बनेगा? वहीं पर कुड कार्ड्स रखे हुए थे जिस पर चिड़ियाएं अलग–अलग संख्याओं में बैठी हुई थीं। बच्चे पहले सीखे, उसी प्रकार करते हैं–

3 और 2 मिलकर बनते हैं 5

3 और 2 होंगे 5

3 धन 2 बराबर 5

3 + 2 = 5

बच्चे वह कार्ड देखते हैं, जिस पर पांच चिड़ियाएं बनी हुई हैं। f"k्षक यह समझ चुके हैं कि चित्रात्मक प्रस्तुती के कारण बच्चे धन व बराबर को अपने प्रतीकों के साथ जोड़ने लगे हैं तथा उनकी जोड़ की समझ बन चुकी है।

यहां पर, f"k्षक का तरीका है कि बच्चों को जोड़ से परिचित कराने के तीन चरण हैं– ठोस चीजों के संदर्भ में, चित्रों की प्रस्तुति के संदर्भ में और प्रतीकात्मक प्रस्तुति के संदर्भ में।

प्र"न : क्या एक ही तरह की चीजों को इस्तेमाल करने हुए जोड़ सीखाना सही है? अपने जवाब का कारण दीजिए।

प्र"न : कक्षा f"k्षण के दौरान आप छोटे बच्चे से दो तरह से प्र"न करें। पहला, 4 और 2 कितने होते हैं? दूसरा, तुम्हारे पार 4 टाफियां हैं, अगर तुम्हें 2 टाफियां और मिले तो तुम्हारे पास कुल कितनी टाफियां होंगी? पता करें किस प्र"न का जवाब देने बच्चे के लिए सबसे आसान है। इसका तार्किक दृष्टि से वि"लेषणात्मक अवलोकरन करें।

इबारती सवाल

बच्चों को इबारती सवाल शुरू से ही दिये जाने चाहिए न कि 'मूल तथ्य सीख जाने' के बाद। जब आप बच्चों से मिलें, बातचीत करें, तो उनसे उस अवधारणा के बारे में इबारती सवाल पूछने के स्वाभाविक अवसरों को तला"ों। मोटे तौर पर, जोड़ से संबंधित दो किस्म के इबारती सवालों से बच्चों का पाला पड़ता है।

एकत्रीकरण – जब दो या दो से अधिक रा"ायों को मिलाकर एक रा"ा बनानी हो।

वृद्धि – जब किसी रा"ा को नि"िचत मात्रा से बढ़ाना हो तथा बढ़ी हुई रा"ा को ज्ञात करना हो।

प्र"न : आप किस प्रकार की गतिविधियों की सहातया से बच्चों को इबारती सवालों की दो किस्मों की समझ बनाने में मदद कर सकेंगे?

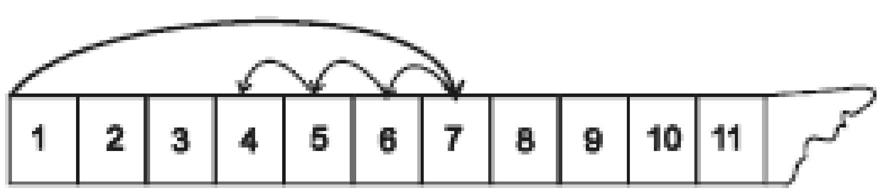
यह बहुत महत्वपूर्ण है कि बच्चों को इबारती सवाल करने के अवसर मिलें। इस तरह के बहुत से सवाल हल करने पर बच्चे जोड़ने की अमूर्त संक्रिया को समझने लगते हैं और इसकी दुनियां से जुड़ जाते हैं।

3.10.2 घटाने की समझ का विकास

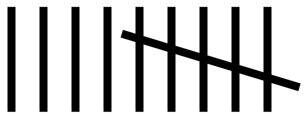
आइए, हम देखें कि घटाने की क्षमता विकसित करने में बच्चों की मदद कैसे कर सकते हैं। यह प्रक्रिया जोड़ की प्रक्रिया के विपरीत है। जोड़ की तरह घटाने से भी बच्चों का परिचय परिचित वस्तुओं के संदर्भ में ही कराया जाना चाहिए। उदाहरण के तौर पर 3 टाफी में से 2 टॉफी निकालने या कम करने को कहा जा सकता है। इसी प्रकार लड्डू, चपातियाँ, कंकड़, गोलियों से कापफी अभ्यास कराने पर बच्चों में धीरे–धीरे घटाव की समझ विकसित होने लगती है। ध्यान देना है कि जब ये क्रिया करायें तो इससे जुड़े विभिन्न शब्द बच्चे भी दुहराते जायें। ऐसी कहानियाँ और खेल भी सोचे जा सकते हैं जो बच्चों की समझ विकसित करने में मददगार हो। जैसे– मुन्नी के घर में 7 लोग रहते थे। 3 लोग बाहर चले गये। तो 7 घटाव 3, यानी 4 लोग घर पर रह गये।

प्र"न : घटाव की क्षमता विकसित करने के लिए खेल का अवसर भी बच्चों को देना चाहिए। जैसे दो बच्चों को पासा और 6 कंकड़ दे देंगे। एक बच्चा पासा फेंकेगा और प्राप्त संख्या के बराबर कंकड़ निकाल देगा। शेष बचा कंकड़ ही उसका अंक होगा जैसे पासा फेंकने पर आया 2 तो 6–2=4 इसी तरह दूसरा बच्चा भी पासा फेंकेगा और घटावफल प्राप्त करेगा। जैसे 6–1=5 जिसका घटावफल बड़ा होगा वह विजयी होगा।

संख्या पट्टी (Number Strip) का भी इस्तेमाल घटाव की समझ विकसित करने में किया जा सकता है। इससे बच्चों में उल्टी तरपफ से गिनने की झमता का विकास किया जा सकता है। उदाहरण के तौर पर 7 में से 3 घटाने का अर्थ यह होगा कि पहले हम 7 तक गिनें और पिफर 3 खाने वापिस जाएँ।



इसके अलावा बच्चे खड़ी रेखाएँ खींचकर भी घटाने की क्रिया कर सकते हैं। इसके लिए बड़ी संख्या के बराबर रेखाएँ खींचकर जितने को घटाना है, उतने काटकर शेष को गिन लेते हैं जैसे 9 में से 5 घटाने के लिए निम्न तरीके अपनाते हैं:



शेष = 4

प्र"न : आप बच्चों को 15–8 जैसे सवालों को हल करना किन तरीकों से सिखाते रहे हैं?

जब बच्चे को घटाने की प्रक्रिया समझ में आ जाए तो आप उन्हे घटाने का संकेत बता सकते हैं। यहाँ यह भी आवश्यक है कि शब्द 'घटाव' तथा प्रतीक '–' की पहचान के लिए उन्हें बार–बार इनके उपयोग का मौका मिले। साथ ही वह घटाव से संबन्धित दैनिक जीवन के सवाल हल करे। जैसे बच्ची कुछ निि"चत वस्तुओं में से कुछ वस्तुएं अलग कर देती है तो कितनी वस्तुएं शेष रहती हैं?

घटाव से सम्बंधित इबारती सवाल जो बच्चों के सामने आते रहते हैं, उन की निम्न चार स्थितियां हो सकती हैं–

- निकालने या घटाने पर शेष (बची हुई) चीजों की संख्या प्राप्त करना– जैसे रामू के पास 10 टॉफियाँ थी वह 3 टाफियाँ खा गया, तो कितनी टॉफियाँ बचीं।
- दो समूहों या संख्याओं का अन्तर पता करना। जैसे– मुन्नी के पास 10 टॉफियाँ हैं तथा मुन्ना के पास 5 टॉफियाँ हैं, तो मुन्ना के पास मुन्नी से कितनी कम टॉफियाँ हैं।
- घटाई गई या निकाली गई राशि पता करना। जब मूल राशि तथा शेष बची राशि पता हो, जैसे– मुन्नी के पास 10 टाफियाँ थीं और अब सिर्फ 4 बची हैं, तो वह कितनी टापिफयाँ खा गई?
- पूरक जोड़ (कितने और) वाले प्रश्न, जिसमें किसी संख्या को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या में बदलने के लिए कितना जोड़ना होगा। जैस–े किसी बॉक्स में 10 पेंसिलें रखी जा सकती हैं। इस बॉक्स में पहले से 2 पेंसिले हैं तो और कितनी पेंसिलें रखनी होंगी? पूरक जोड़ के प्रश्नों में बच्चे का ज्यादा कठिनाई होती है, क्योंकि और "कितना" का संबन्ध जोड़ से होता है। ऐसे में बच्चे दिए गए अंकों को जोड़ देते हैं। किन्तु कुछ ऐसे बच्चे भी होते हैं, जो घटाने के सारे सवालों को पूरक जोड़ के सवाल के रूप में हल करते हैं। जैसे '12 में 8 घटाओ' के प्रश्न को 8 में क्या जोड़ने से 12 प्राप्त होगा' के रूप में हल करते हैं। प्रायः दुकानदार इसी विधि से मन में हिसाब लगाते हुए शेष रूपये पैसे को लौटाते हैं, जैसे– 500–370 पता करने के लिए 370 में 30 जोड़कर 400 बना लेते हैं फिर 100 जोड़ कर 500 बना लेते हैं। 500–370=30+100 हो जाता है।

3.10.3 गुणा की समझ का विकास

गुणा की संक्रिया का मतलब यह होता है कि हम दी गई संख्या को निश्चित बार उसी में जोड़ें। आम भाषा में गुणा शब्द का अर्थ यह भी लगाया जाता है कि किसी चीज में 'काफी वृद्धि'। मसलन, 4 गुणा 3 का अर्थ 4+4+4 होता है। लिहाजा गुणा सिखाना शुरू करने के पहले ज़रूरी है कि बच्चे कुछ हद तक जोड़ की संक्रिया को जानते हो। वह जोड़ को लेकर कोई परे"ाानी महसूस न करते हों तथा आसान संदर्भों में इसका

अर्थ समझने लगें तो गुणा सीखने की प्रक्रिया प्रारम्भ की जा सकती है। अब हमें यह सोचना है कि बच्चों को गुणा से परिचित कैसे करायें? गुणा की समझ विकसित करने के लिए जोड़ की समझ के अलावा बच्चों को बराबर मात्रा के समूह बनाना तथा इन समूहों को जोड़ना आना चाहिए। इसके बाद ही गुणा से औपचारिक रूप से परिचय कराना चाहिए।

प्र"न : आप कक्षा 4 या 5 के किसी बच्चे को 38×4 हल करने को दें। अब तुरन्त बाद उससे 39×4 का हल पूछें। बच्चे द्वारा किए गए कार्य का अवलोकन करें। क्या बच्चा अपने पहले हल से दूसरे का हल तुरन्त निकाल लेता है?

प्र"न : निम्नलिखित में से गुणा सीखने का अहम पहलू कौन सा है?

1. गुणन–तथ्य
2. पहाड़े याद कर पाना और उनका अलाप
3. 'कितने गुना' का मतलब समझना

अपने जवाब का कारण दीजिए।

आमतौर से बच्चे गुणा के तथ्य याद कर लेते हैं तथा तथ्यों को एक दूसरे से संबंधित नहीं कर पाते। इसलिए बच्चे को बराबर मात्राा के समूहों को जोड़ने की क्षमता हासिल करने में हमें मदद करनी होगी। बच्चों से इसका शुरूआती परिचय एक संक्रिया के तौर पर नहीं, बल्कि ठोस चीजों के साथ गतिविधियों के रूप में होना चाहिए। जैसे 3–3 चीजों वाले 5 समूहों का जोड़। इस तरह की गतिविधि के साथ–साथ खेलों, कहानियों, संख्या पट्टी संख्या कार्डों व अन्य गतिविधियों द्वारा बच्चे धीरे धीरे बराबर मात्राओं वाले समूहों को नियमित अन्तर देकर क्रमानुसार गिनने लगते है। इसे छोड़–छोड़ कर गिनना (Skip counting) कहते हैं।

बच्चे खेलो, कहानियों व अन्य गतिविधियों के जरिए छोड़–छोड़ कर गिनने का अभ्यास कर सकते हैं। मसलन, वे 'बच' खेल सकते हैं। इस खेल में बच्चे एक गोल में बैठ जाते हैं और क्रम से गिनती बोलते हैं। हर बच्ची एक संख्या बोलती है। नियम यह है कि जिस बच्ची पर किसी पूर्व निर्धारित संख्या का गुणज आता है, वह संख्या बोलने की बजाय 'बच' कहती है। जैसे–अगर निर्धारित संख्या 4 है, तो पहली बच्ची 1 कहेगी, दूसरी 2 कहेगी, अगली बच्ची 3, बच, 5, 6, 7 और फिर बच, वगैरह कहेंगे। अगली बारी में कोई और संख्या ली जाए। धीरे–धीरे बच्चों के दिमाग में इन गैरहाजिर संख्याओं का एक पैटर्न बनने लगता है। बराबर मात्रा के समूहों की गिनती तथा बच जैसी गतिविधियों से यह पैटर्न बनने में मदद मिलती है। इससे बच्चों को नियमित बराबर अंतर देकर गिनती करने की ओर बढ़ने में मदद मिलती है।

उदाहरण अपनी कक्षा में बच्चों के 4–5 समूह बना लें। प्रत्येक समूह के प्रत्येक बच्चे को बारी–बारी से एक बाल्टी में गेंद फेंकने को कहें। हर बच्चे को 3 मौके मिलेंगे और हर कामयाबी पर 5 अंक। बच्चे स्वयं गणना करें कि उनकी टोली को कितने अंक मिले हैं।

बच्चों को इस तरह से ठोस वस्तुओं के ज़रिए गुणा से परिचित कराते हुए हमें उनसे लगातार बातचीत करते जाना चाहिए कि वे क्या कर रहे हैं। इस तरह से उनमें समझ विकसित होगी कि गुणा करने का मतलब बारम्बार जोड़ना होता है। गुणा का औपचारिक प्रतीक '×' बच्चों को तभी बताना चाहिए जब वे यह समझ जाएँ कि गुणा होता क्या है। इसी प्रकार से गुणनफल, गुणक आदि जैसे औपचारिक शब्द बच्चों को

थोड़ा आगे चलकर ही बताए जाने चाहिए और वह भी इनका उपयोग विभिन्न व्यावहारिक उदाहरणों में करके समझाए जाने चाहिए। हम यहां निरन्तर गतिविधियां कर रहे हैं। पर हमें उन बातों पर भी ध्यान देना चाहिए, जहां पर बच्चों का सामना गुणा से होता है। उन्हें बराबर समूह, दर, आयताकार समूह, पैमाना/गुणक संख्या व कार्तीय गुणनफल के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है।

प्र”न : यहां पर गुणा के उपर पांच परिस्थितियां दी गयी हैं। इन्हें आप उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करें।

प्र”न : गुणा क्या होता है, बच्चे इसे समझते हैं कि नहीं। इसे जानने के लिए कक्षा 4 या 5 के बच्चे को कोई गुणन तथ्य (जैसे 5×3=15) देकर उससे संबन्धित एक इबारती सवाल बनाने को कहिए। यह देखिए कि वे किस तरह के सवाल बनाते हैं। यदि आप बच्चों के साथ ऐसे अभ्यास के परिणामों का अध्ययन करें, तो आपको इससे क्या जानकारी मिलेगी?

अब तक हमने कुछ आसान गुणन तथ्य की समझ बनाने की चर्चा की है। अब दो संख्याओं के गुणा के लिए सूत्र रूपी प्रक्रिया की चर्चा करेंगे, जिसमें कई बच्चे गलती करते हैं।

उदाहरण : बच्चों द्वारा किए गए निम्न गुणन संक्रिया पर गौर करें :

22 547 × 4 2848	26 × 31 66	35 × 5 1525

जब एक बच्ची से पूछा गया कि तुमने तीसरा गुणा कैसे किया तो उसने कहा, 5 को 5 से गुणा किया तो 25 आया तो वहां पर 25 लिख दिया तथा आगे 5×3=15 को लिख दिया। अब आप स्वयं यह ढूंढने का प्रयास करें कि ये गलतियां कुछ बच्चों ने क्यों की? गुणा के एल्गोरिद्म में कौन–सी प्रक्रियाएं शामिल हैं और यह विधि क्यों सही जवाब देती है?

इस ऐल्गोरिद्म को समझने के लिए स्थानीय मान, गुणा का अर्थ, हासिल, बंटन नियम (distributive law) की समझ ज़रूरी है। पूर्व में स्थानीय मान, गुणा का मतलब एवं हासिल की चर्चा की जा चुकी है। यहाँ जोड़ के सापेक्ष गुणा में बंटन नियम को देखें। सामान्य रूप में, किन्हीं तीन संख्याओं a, b और c के लिए नियम इस तरह लिखा जाएगा–

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$$

जैसे– $(30 + 7) \times 9 = (30 \times 9) + (7 \times 9)$

$$(40 - 3) \times 9 = (40 \times 9) - (3 \times 9)$$

बच्चों को यह नियम समझने में मदद कैसे करें? इसके लिए ठोस वस्तुओं द्वारा छोटी–छोटी संख्याओ के बंटन के उदाहरण इस प्रकार देने होंगे कि बच्चे स्वयं नियम खोज पाएँ। इसके लिए 4, 4 गोलियों की

7 थैलियाँ बना लें। तीन थैलियों को अलग और चार थैलियों को अलग रखें। अब बच्चों से पूछें सभी थैलियों में कुल कितनी गोलियाँ हैं। गौर करें बच्चे कैसे गिनते हैं 7×4 या 3× 4, 4 × 4 दोनों तरीकों का अभ्यास कराते हुए दोनों के अन्तर पर चर्चा कराइए। इसी तरह पफूलों के गुच्छे, पंक्तियों, कतारों के माध्यम से भी इस अवधारणा का विकास कराया जा सकता है। विभिन्न गतिविधियों एवं उदाहरणों के माध्यम से बच्चे धीरे–धीरे यह समझने लगते हैं कि जब किसी 2 अंक वाली संख्या को 1 अंक वाली संख्या से गुणा करना हो तो उसे दहाई व इकाई में बाँट लेते हैं। इन गुणनफलों को आपस में जोड़ने पर सही उत्तर मिल जाता है। जैसे–

$$12 \times 3 = (10\times3)+(2\times3)$$

$$= 30+6 = 36$$

हमें ध्यान देना होगा कि जब बच्चे गुणा सीख रहें हों तो बार–बार बंटन की बात पर लौटना होगा तभी धीरे–धीरे अवधारणा को समझ पायेंगे।

गतिविधिः अपने कक्षा 5 के कुछ बच्चों को 28×17 जैसे सवाल हल करने को दीजिए। उनसे बातचीत करके पता लगाइए कि वे इसको हल करने के लिए क्या–क्या तरीके अपनाते हैं। गुणा इकाई स्थान से क्यों शुरू करते है तथा गुणा की दूसरी पंक्ति में एक स्थान खाली (या ×, 0) क्यों रखते हैं।

हम गुणा की संक्रिया सबसे छोटी इकाई (unit) वाले अंक से शुरू करते हैं क्योंकि हम सबसे पहले इकाई के स्थान पर अंकों की मात्रा वाले समहों को जोड़ते हैं। इससे प्राप्त परिणाम पहली पंक्ति में लिखा जाता है। फिर गुणक के दहाई अंक से गुणा करते हैं, तो प्राप्त परिणाम दहाई को दहाई के सामने (अर्थात् एक स्थान खाली छोड़कर) लिखते हैं। बच्चों में ये सारी समझ विकसित करने के लिए उन्हें बार–बार इस बात पर आना चाहिए कि गुणा की सूत्र विधि काम कैसे करती है।

प्र”न : अपनी कक्षा में बंटन के नियम पर आधारित एक गतिविधि करवाइये। उनसे बातचीत करके यह पता लगाइए कि इस गतिविधि में गुणा करने के लिये क्या–क्या तरीके अपनाते हैं। उनका अवलोकन कर लिखें।

प्र”न : 3 अंक की संख्या को 2 अंक की संख्या से गुणा करने की विधि चरण–दर–चरण लिखिये। ये भी समझाइए कि हर चरण कैसे काम करता है।

3.10.4 भाग की समझ का विकास

कुछ लोग भाग को गणित की चार बुनियादी संक्रियाओं में सबसे कठिन मानते हैं। क्या आप इससे सहमत हैं? क्या व्यावहारिक जीवन में अन्य संक्रियाओं की अपेक्षा भाग के मौके कम आते हैं। जब कक्षा 5 के बच्चों से 30 टॉफियों को 3 बराबर भागों में बाँटने के लिए कहा गया, तो अधिकांश बच्चों के जवाब सही थे।

किन्तु जब बच्चों से पूछा गया कि 30 टॉफियों में से 3, 3 टॉफियाँ बाँटने पर कितने बच्चों को टॉफियाँ मिलेंगे तो अधिकांश बच्चे चुप रहे।

वस्तुतः भाग की इन दोनों स्थितियों के परिचित संदर्भों में समझ विकसित नहीं होने के कारण बच्चे इबारती प्रश्नों में आसानी से यह नहीं पहचान पाते कि कब भाग देना है और किस संख्या से किस संख्या में भाग देना है।

आप बच्चों में भाग की विभिन्न स्थितियों की समझ विकसित करने के लिए क्या करेंगे?

एक स्कूल के शिक्षक को यक़ीन है कि ठोस चीजों के साथ आसान गतिविधियाँ कराने से बच्चों में भाग की समझ विकसित होती हैं।

उदाहरण के तौर पर 20 बीजों/पंक्तियों/कंकड़ों को 4,4 के समूह में बच्चों से रखवाएँ और समूहों की संख्या गिनवाएँ, फिर बच्चों से पूछें 20 में कितने 4 हैं या 20 में से 4 को कितने बार घटाया जा सकता है।

$$\begin{array}{r} 20 \\ -4 \\ \hline 16 \\ -4 \\ \hline 12 \\ -4 \\ \hline 8 \\ -4 \\ \hline 4 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \text{5 बार}$$

अभी तक हमने 'शून्य' शेष की चर्चा से भाग की समझ विकसित करने का प्रयास किया है। 7 को 3 से भाग देने पर शेष क्या रहेगा? जैसे सवालों को दैनिक जीवन एवं ठोस उदहारणों से समझ को पुख्ता किया जा सकता है। उदहारण के तौर पर मोहन 9 टाफियाँ खरीदता है और 4 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटता है, तो उसके पास कितनी टॉपिफयाँ बची? बच्चों के सामने ऐसे कई उदाहरण रखे जा सकते हैं। किन्तु ध्यान रहे कि बच्चों के बीच भागपफल, शेष की चर्चा होती रहनी चाहिए। साथ ही, बच्चों से ऐसी समस्याएँ बनाने को कहा जा सकता है, जिसमें 'शेष' आते हों। धीरे–धीरे सवालों में आने वाली संख्याओं को बड़ा किया जा सकता है। ये गतिविधियाँ समूहों में अलग–अलग संख्याओं पर तथा अलग–अलग संदर्भ में दोहराई जा सकती है।

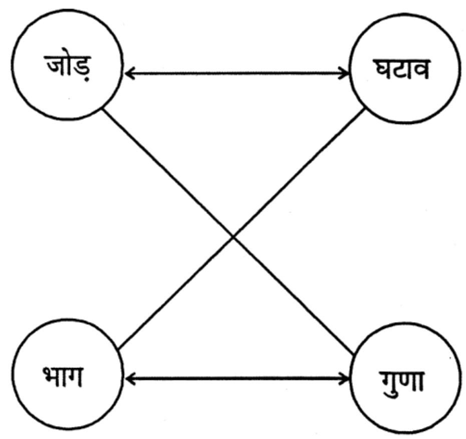
3.10.5 संक्रियाओं में अन्तर्सम्बन्ध

अभी तक हमने चारों मुलभूत संक्रियाओं, यथा जोड़, घटाव, गुणा और भाग की चर्चा बच्चों में संक्रियाओं की अवधारणा विकसित करने के रूप में की है। आगे हम संक्रियाओं के बीच निहित अर्न्तसंबन्धों को देखने का प्रयास करेंगे।

आप अपने अनुभव से निम्नलिखित प्रश्नों का हल ढूँढें–

1. जोड़ और गुणा की संक्रियाएँ परस्पर कैसे समान है?
2. घटाव और भाग की संक्रियाएँ एक दूसरे से कैसे संबन्धित हैं?
3. क्या जोड़ और घटाव एक दूसरे के विपरीत प्रक्रिया है?
4. गुणा और भाग परस्पर विपरीत संक्रियाएँ कैसे हैं?
5. संक्रियाओं के अंतर्संबंध संक्रियाओं की अवधारणा विकसित करने में कैसे मददगार हैं?
6. क्या बच्चे एक साथ एक से अधिक संक्रियाओं को सीख सकते हैं?

हम विभिन्न संक्रियाओं के अन्तर्सम्बन्धों को निम्न रेखाचित्र द्वारा समझ सकते हैं और बच्चों को समझाने का प्रयास भी कर सकते हैं।



हम देख सकते हैं कि जोड़ने की प्रक्रिया घटाने की प्रक्रिया की उल्टी है। जोड़ में किसी संग्रह में कुल और मिलाकर (डालकर) उसे बड़ा बनाते हैं जबकि घटाव में उस संग्रह में से कुछ निकालकर उसे छोटा करते हैं– ये परस्पर विपरीत प्रक्रियाऐं हैं।

5+3 = 8 (मिलाना)

8–3 = 5 (निकालना)

स्पष्टतः घटाव सिखाने के लिए यह ज़रूरी नहीं है कि जोड़ का गहरा ज्ञान हो। जब बच्चे आसान परिस्थितियों में जोड़ और घटाव का अर्थ समझ लें तथा. और – के प्रतीक से परिचित हो जायें तो + और – के बीच संबन्ध समझाने के लिए बच्चों को कई गतिविधियाँ दी जा सकती हैं।

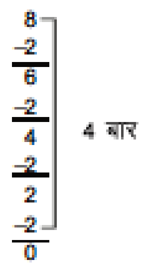
गतिविधिः बच्चों को छोटी–छोटी टोलियों में बाँटकर प्रत्येक टोली को कार्डों का सेट दे दें। इन कार्डों का इस्तेमाल करके एक जोड़ तथ्य (Addition fact) लिखने तथा परिचित संदर्भ से जोड़ कर बोलने को कहें। फिर की जगह वाला कार्ड दे दें तथा घटाव तथ्य बनाने एवं परिचित संदर्भ से जोड़कर बोलने को कहें। इसी तरह अन्य कार्डों की सहायता से गणितीय कथन तथा इबारती प्रश्न बना सकते हैं।

हम देख चुके हैं कि 4+4+4 = 4 × 3 = 12 = 3 ×4 = 3 + 3 + 3 + 3 इस तथ्य से स्पष्ट है कि गुणा जोड़ की संक्षिप्त प्रक्रिया है।

गतिविधिः कॉलम B के प्रश्नों का मौखिक हल प्राप्त कीजिए–

कॉलम–A	कॉलम–B
93 × 5 = 465	94 × 5 =
87 × 3 = 261	88 × 3 =
15 × 4 = 60	15 × 5 =
134 × 3 = 402	135 × 3 =

भाग को घटाव के संक्षिप्त प्रक्रिया के रूप में देखा जा सकता है। शुरू में कई बच्चे बारम्बार घटाने का सहारा लेते हैं। जैसे 8÷2=........... बनायें या 8 में 2 कितनी बार आएगा? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए वे 2 का पहाड़ा 8 तक बोलते हैं और कहते हैं 8 भाग 2 बराबर 4 होगा। अर्थात्



भाग की संक्रियाएँ सीखते समय बच्चे × और ÷ के बीच संबन्ध को समझ सकते हैं और बच्चे दोनों संक्रियाएँ साथ–साथ सिखते हैं। गुणा और भाग परस्पर विपरीत संक्रियाएँ हैं। जैसे–

4 × 3 = 12

12 ÷ 4 = 3

12 ÷ 3 = 4

गतिविधिः बच्चे को पन्द्रह तीलियाँ दें और उसे 3–3 तीलियों के बण्डल में बाँटने को कहें। प्राप्त बण्डलों की संख्या गिनवाएँ। इसे गणितीय तथ्य के रूप में लिखने को कहें मह 15÷3 = 5 फिर बंडलों में कुल तीलियों की संख्या प्राप्त करने को कहें अर्थात् 5×3 = 15 तीलियाँ। इसी तरह की अन्य गतिविधियाँ पत्थर, पत्ते, टहनियाँ आदि से करवाएँ।

गतिविधिः बच्चों को छोटी–छोटी टोलियों में बाँट कर प्रत्येक टोली को जैसे कार्डों का सेट दे दें। इन कार्डों की सहायता से एक भाग–तथ्य बनाने को कहें। फिर ÷ की जगह × वाला कार्ड दे दें और उन्हीं कार्डों से गुणन–तथ्य बनाने को कहें।

बच्चों को वर्कशीट देकर भी गुणन–भाग तथ्यों को समझा जा सकता है।

10 × 5 =	50 ÷ ? = 10
	50 ÷ ? = 5

12 × 6 =   72 ÷ ? = 12

72 ÷..?.. = 6 आदि

काफी समय तक गतिविधियों एवं अन्य अभ्यासों से गुजरने के बाद बच्चे 27÷3 = 9 जैसे कथन को समझने लगते हैं कि:

- 27 में 3 नौ बार आता है।

  000 000 000 000 000 000 000 000 000

- 27 चीज़ों को 3 बराबर भागों में बाँटा जाय तो एक भाग में 9 चीजें होंगी।

  000000000 000000000 000000000

- 27 चीजों के समूह में 3–3 के 9 समूह होंगे।

  000 000 000 000 000 000 000 000 000

- 27 में 3 को 9 बार घटाया (निकाला) जा सकता है।

  000 000 000 000 000 000 000 000 000

  1 2 3 4 5 6 7 8 9

- 9 तिया 27 होते हैं।

  000000000 000000000 000000000. .

- 3 नवाँ 27 होते हैं।

  000000000000000000000000000

3.11 सारां"ा

ळमने समझा कि संख्या की अवधारणा से पहले पूर्व संख्या अवधारणाओं जैसे वर्गीकरण, अनुक्रम में रखना 'एक–एक की संगति जमाना' को जानना आवश्यक है। पूर्व संख्या अवधारणाओं को विकसित करते के लिए विविध गतिविधियों को कक्षा में करा पाने के तरीकों को समझा। गिनती करने के अर्थ पर चर्चा की गई तथा गिनने का मतलब सिर्फ संख्याओं के नामों को बोलना नहीं है, को स्पष्ट किया गया। गिनती करने के तरीके सुझाए गए। इस बात को स्पष्ट किया गया कि 0 से 9 तक की संख्याओं के प्रतीक बच्चे को तभी बताया जाय, जब उसे उन संख्याओं के अर्थ समझ में आ चुके हों। बच्चों को जोड़, घटाव, गुणा और भाग का अर्थ समझने के तरीकों को सुझाया गया। इन संक्रियाओं की समझ के लिए ठोस गतिविधियों एवं परिभाषिक शब्दों के उपयोग की क्षमता हासिल करने में मदद देने के तरीकों की चर्चा की गई। उन विभिन्न स्थितियों की चर्चा की गई जिनमें इन संक्रियाओं का उपयोग करना पड़ सकता है। इस बात की चर्चा की

गई कि संक्रियाओं का ऐल्गोरिद्म बच्चे को याद न करके, समझ के साथ गतिविधियों के जरिए बताए जाने चाहिए।

3.12 प्रदत्त कार्य

(1) कब कहेंगे कि किसी बच्चे को गिनती की समझ हो गई है? गिनने में मुख्य प्रक्रियाओं को उदाहरण के साथ समझाइए।

(2) संख्या के विकास में वर्गीकरण से क्या अभिप्राय है? बच्चों में वर्गीकरण की समझ विकसित करने के लिए आप किन–किन गतिविधियों का संचालन कर सकते हैं? इनमें से किन्हीं तीन गतिविधियों का वर्णन करें।

(3) मूर्त्त वस्तुओं की सहायता से संख्या की समझ विकसित करने की एक गतिविधि के आयोजन की प्रक्रिया का उल्लेख करें।

(4) जोड़ एवं गुणा तथा घटाव एवं भाग की संक्रियाएँ एक दूसरे से कैसे संबंधित हैं? उदाहरण देते हुए समझाइए।

(5) दो अंकीय संख्याओं के गुणा में हम दहाई वाले अंक से गुणा करते समय एक स्थान छोड़कर लिखते हैं। ऐसा करने के कारण एवं इसके पीछे की अवधारणा को बच्चे को कैसे समझाएँगे?

(6) निम्नांकित पर टिप्पणी लिखिए–

(i) संख्या रेखा व संखाएँ

(ii) संख्या की अवधारणा में एक–एक की संगति

(7) स्थानीय मान की अवधारणा को सरल बनाने के लिए आप कौन–कौन सी शिक्षण सामग्री का उपयोग करेंगे? किसी एक की सहायता से किसी संख्या के अंकों के स्थानीय मान समझाने की विधि का वर्णन करें।

(8) संख्या रेखा की सहायता से जोड़ की अवधारणा विकसित कीजिए।

इकाई–4

भिन्नात्मक संख्याएँ और दशमलव

संरचना

4.1 परिचय

4.2 उददे्”य

4.3 भिन्नात्मक संख्याएं

4.4 भिन्नात्मक संख्या क्या हैं?

4.4.1 सम भिन्न

4.4.2 विषम भिन्न

4.4.3 मिश्रित भिन्न

4.5 भिन्नात्मक संख्याओं की समझ

4.6 संख्या रेखा और संख्याएं

4.7 भिन्नात्मक संख्याओं से परिमेय संख्याओं की ओर

4.7.1 परिमेय संख्याएं और संख्या रेखा

4.8 भिन्नात्मक संख्या का उपयोग

4.9 भिन्न के विभिन्न अर्थ

4.9.1 भिन्न व भाग

4.9.1 गणक के रूप में भिन्न

4.9.1 पूर्ण का हिस्सा

4.9.1 अनुपात

4.9.1 मापक

4.10 द”ामलव संख्या

4.11 द”ामलव भिन्ने

4.12 बच्चों को भिन्नात्मक संख्याएं सिखाना

4.12.1 टुकड़े कैसे करें

4.12.2 पूर्ण की समझ

4.13 भिन्नात्मक संख्याएं एवं उनकी शब्दावली

4.14 बड़ी–छोटी संख्याएं

4.15 भिन्नों की तुल्यता

4.16 भिन्नों का जोड़ एवं घटाव

4.16.1 भिन्नों का जोड

4.16.2 असमान हर की भिन्न का जोड़

4.16.3 तुल्य भिन्न व जोड़ना–घटाना

4.16.4 भिन्नों का घटाव

4.17 भिन्नात्मक संख्याओं का गुणा एवं भाग

4.17.1 भिन्नात्मक संख्याओं का गुणा

4.17.2 भिन्नात्मक संख्याओं का भाग

4.18 द"ामलव संख्या सिखाना

4.19 द"ामलव संख्याओं पर संक्रियाएं

4.19.1 जोड़ और घटाव

4.19.2 गुणा

4.19.3 भाग

4.20 कुछ गतिविधियां

4.21 सारां"ा

4.22 स्वमूल्यांकन

4.23 अध्ययन केन्द्र पर की जाने वाली गतिविधियां

4.1 परिचय

प्राकृत संख्याओं से आगे बढ़ते ही उससे बड़ा एक समूह हमारे सामने आता है। यह भिन्नात्मक संख्याओं का समूह है। भिन्नात्मक संख्याओं का ही एक हिस्सा दशमलव भिन्नात्मक संख्याएँ हैं, जिनका उपयोग गणना में बहुत मदद करता है। लेकिन इनका उपयोग ठीक से करने के लिए आवश्यक है कि भिन्नात्मक संख्याएँ क्या होती हैं, इनके क्या गुण होते हैं आदि की समझ हो। साथ ही इन्हें समझना गणित की व्यापक समझ विकसित करने के लिए और हमारे जीवन में जहाँ–जहाँ पूर्ण के हिस्सों की बात होती है, वहाँ भी जरूरी है। चाहे वह घंटे का हिस्सा हो, चाहे किलोमीटर या किलोग्राम का, चाहे दर्जन का अथवा सौ का (प्रतिशत), सब में भिन्नात्मक और दशमलव भिन्नात्मक संख्याएं आती हैं। वस्तुओं की मात्रा को दर्शाने में भी इनके उपयोग की जरूरत होती है जैसे डेढ़ रोटी, $2\frac{1}{2}$ बिस्कुट, आधा गिलास पानी आदि–आदि।

चूंकि यह प्राकृत संख्या से फर्क होती है, अतः इन्हें समझने, प्रतीकों में व्यक्त करने, इनके साथ संक्रियाएं करने व अलग–अलग संदर्भों में संख्या व संक्रियाओं के अर्थ को समझने में शुरुआती दिक्कत होती है। यद्यपि इस का अध्ययन प्रारम्भिक कक्षाओं में गणित के काफी बड़े हिस्से को घेरता है और फिर भी इससे जुड़ी अवधारणाओं में अधिकांश सीखने वालों को स्पष्टता हासिल नहीं होती और वह इन्हें समझने व उपयोग लेने में सहज भी नहीं हो पाते।

4.2 उद्देश्य :

इस इकाई को पढ़ने के प"चात् आप–

- भिन्नात्मक संख्या की अवधारणा से परिचित हो पायेंगे।
- भिन्न संख्याओं व संख्याओं के अन्य समुच्चयों के संबंध पहचान पायेंगे।
- भिन्नात्मक संख्याओं की किस्मों, तुल्यता व क्रम को जान पायेंगे।
- भिन्नात्मक संख्या को 'हिस्सेदारी', 'गणक, 'अनुपात', 'भाग' शब्दों से जोड़ पायेंगे।
- भिन्नात्मक संख्याओं की जोड़, घटा, गुणा व भाग को सीख पायेंगे।
- भिन्नात्मक संख्याओं को कैसे पढ़ाएं इस पर उपयोगी चर्चा कर पायेंगे।
- भिन्नात्मक संख्या की संकल्पना को पढ़ाने के लिए उचित गतिविधियों का निर्माण व उपयोग कर पायेंगे ।
- दशमलव के प्रत्यय व अवधारणा को समझ पायेंगे।
- दशमलव के स्थानीय मान व संक्रियाओं के नियमों की अवधारणा स्पष्ट कर पायेंगे। इससे बच्चों की दक्षता बढ़ाने में भी मदद कर पायेंगे।

4.3 भिन्नात्मक संख्याएं

जैसे कि ऊपर कहा गया है इस इकाई में भिन्नात्मक संख्याओं और उन्हें सिखाने के बारे में चर्चा करेंगे। अक्सर भिन्नात्मक संख्याओं को टुकड़ों अथवा हिस्सों के रूप में ही देखा जाता है। यह माना जाता है कि भिन्न सिखाने में सबसे महत्वपूर्ण है इनका प्रतीकीकरण चित्रों में करना। अतः बच्चों की पठन सामग्री और वर्कशीट आदि का भी बहुत बड़ा हिस्सा भिन्नात्मक संख्याओं के चित्रों में प्रस्तुतिकरण पर जाता है। इनको चित्रों में प्रस्तुत करने के लिए कई तरह के अभ्यास दिए जाते हैं। ये अभ्यास भिन्नात्मक संख्या द्वारा प्रदर्शित मात्रा का अहसास करने में मददगार होते हैं। इनसे ही यह समझ आता है कि $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$—— आदि में बड़ी संख्या कौन सी है। किन्तु यह इन संख्याओं के साथ काम करने का अंतिम पडाव नहीं है। ज्यादातर भिन्न संख्याओं का आसानी से चित्र रूप में प्रदर्शन नहीं हो सकता। इसलिए भिन्नात्मक संख्याओं में चित्रों का उपयोग जल्द ही छोड़ना होता है।

आगे बढ़ने से पहले इस बात पर चर्चा करना अच्छा रहेगा कि भिन्नात्मक संख्याएं होती क्या हैं, यह प्राकृत संख्याओं से कैसे–कैसे भिन्न हैं और इनके उपयोग के संदर्भ कहाँ–कहाँ मिलते हैं।

4.4 भिन्नात्मक संख्या क्या है?

अभी तक हमने यह देखा कि प्राकृत संख्याओं से बड़ा समुच्चय भिन्नात्मक संख्या का है। भिन्न (fraction) लेटिन भाषा के शब्द 'fractus' से बना है, जिसका मतलब टूटा–फूटा होता है। सामान्यतः भिन्नात्मक संख्याओं में ऐसी संख्याएँ शामिल होती हैं जिन्हें व्यक्त करने के लिए पूर्ण के आपस में बराबर हिस्सों की जरूरत होती है। भिन्नात्मक संख्या को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है–

$\frac{p}{q}$, जहाँ पर p व q पूर्ण संख्या हैं तथा q का मान 0 के बराबर नहीं है।

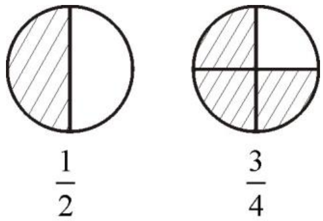
यहाँ रेखा के ऊपर लिखी गई संख्या, उपयोग में लाए गए बराबर हिस्सों की संख्या को व्यक्त करती है तथा रेखा से नीचे लिखी गई संख्या, कुल हिस्सों की संख्या को व्यक्त करती है। उतने हिस्से जिनसे एक पूर्ण का निर्माण हो सके। भिन्नात्मक संख्या दो पूर्ण संख्याओं से मिलकर बनी है। इसमें रेखा के ऊपर लिखी गई संख्या को अंश तथा रेखा के नीचे लिखी गई संख्या को हर कहा जाता है।

यहाँ पर हमने यह जाना कि भिन्नात्मक संख्या क्या है? अब हम भिन्न के प्रकार को समझते हैं–

4.4.1 सम भिन्न

सम भिन्न वह संख्या होती है जिसमें रेखा के ऊपर लिखी गई संख्या, रेखा के नीचे लिखी गई संख्या से छोटी होती है। $(p < q)$ तथा जिसका पूर्ण मान 1 से छोटा होता है। जैसे– $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$ इन्हें उचित भिन्न भी कहा जाता है।

हम यह तो समझ ही गये कि सम भिन्न में एक ही पूर्ण के हिस्से की बात होती है। अक्सर सम भिन्न को ध्यान में रख कर ही भिन्न के चित्रण के उदाहरण दिए जाते हैं, इससे इन्हें ही भिन्नात्मक संख्या के संपूर्ण समुच्चय के रूप में मान लिया जाता है। किन्तु यह भिन्नात्मक संख्याओं का एक छोटा हिस्सा ही है।

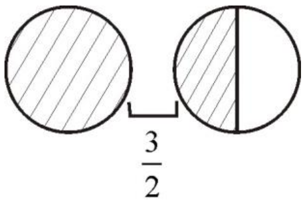


प्रश्न : (i) किन्हीं तीन सम भिन्नों को बताइये।

(ii) सम भिन्न को व्यक्त करने के अभ्यास हेतु एक गतिविधि बनाइये तथा उसे अपनी कक्षा में बच्चों के साथ करवाइये।

4.4.2 विषम भिन्न

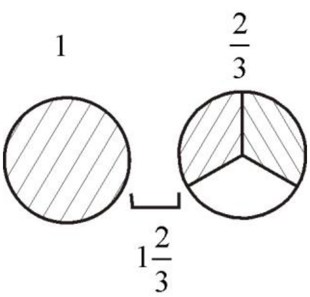
यह वह भिन्न होती है जिसमें रेखा के नीचे लिखी संख्या (हर), रेखा के ऊपर लिखी संख्या (अंश) से छोटी होती है $(q < p)$ तथा जिसका मान 1 से बड़ा होता है। जैसे– $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}$। इसे हम इस तरह दिखा सकते हैं–



यहाँ पर हमने देखा कि विषम भिन्न को व्यक्त करने के लिये एक से अधिक पूर्ण की आवश्यकता होती है।

4.4.3 मिश्रित भिन्न

मिश्रित, भिन्न विषम भिन्न का ही रूप होता है। इसमें भिन्नात्मक संख्या को प्राकृत संख्या व सम भिन्न के योग के रूप में लिखा जा सकता है। इस का पूर्ण मान 1 से अधिक होता है। जैसे– $\frac{5}{2}$ को बनाने के लिये प्राकृत संख्या 2 तथा सम भिन्न $\frac{1}{2}$ को मिलाया गया है। तथा इसे हम मिश्रित भिन्न के रूप में $2\frac{1}{2}$ लिख सकते हैं। $2\frac{1}{2}$ इसी तरह $\frac{5}{3}$ भी 1 तथा $\frac{2}{3}$ से बना है, इसे $1\frac{2}{3}$ लिखेंगे।



प्रश्न : (i) $\frac{7}{2}, \frac{8}{5}, \frac{9}{4}, \frac{13}{5}, \frac{17}{3}$ को मिश्रित भिन्न के रूप में कैसे व्यक्त करेंगे?

क्या सभी मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में व्यक्त कर सकते हैं? उदाहरण देकर समझाइये।

(ii) इन सभी को सम व विषम भिन्नों में वर्गीकृत कीजिए–

$\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{8}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{1}{9}, \frac{9}{5}, \frac{8}{7}$

4.5 भिन्नात्मक संख्याओं की समझ

हमने यह देखा कि भिन्नात्मक संख्याएँ क्या होती हैं। यह भी प्राकृत अथवा पूर्ण संख्याओं की तरह संख्याएँ तो हैं पर उनसे कई प्रकार से अलग हैं। प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3 होती हैं इन के कई गुण हैं। लेकिन भिन्नात्मक संख्याओं के गुण कुछ अलग है। भिन्नात्मक संख्याएँ तो प्राकृत संख्याओं के अनुपात के रूप में लिखी जाती हैं। किन्तु प्राकृत व पूर्ण संख्याओं को भी हम भिन्नात्मक संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। जैसे– $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}$ यह सब प्राकृत संख्याएँ हैं जिन्हें भिन्न के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्राकृत संख्याओं से बड़ा समूह पूर्ण संख्याओं का होता है जिसमें 0 को भी सम्मिलित किया जाता है। पूर्ण संख्याओं को w से दर्शाया जाता है। $\{w = 0, 1, 2, 3, ...\}$।

प्राकृत अथवा पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं को देखें, तो पाएँगे कि ऐसी दो संख्याओं को जोड़ने पर हमेशा एक पूर्ण अथवा प्राकृत संख्या ही मिलती है, यानी प्राकृत व पूर्ण संख्या का समूह जोड़ के लिए संपूर्ण है।

3 + 2 = 5

7 + 12 = 19 हम देख सकते हैं कि तीनों संख्याएँ पूर्ण संख्या है।

यानी $n_1 + n_2 = n_3$

इसी तरह से भिन्नात्मक संख्याओं का समूह भी है $\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$

$\frac{1}{6} + \frac{11}{6} = \frac{12}{6}$,

$\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_3}{w_4} = \frac{w_5}{w_6}$

इसमें भी दो भिन्नात्मक संख्याओं को जोड़ने पर भिन्नात्मक संख्या ही प्राप्त होती है। शर्त सिर्फ यह है कि w_2 और w_4 शून्य नहीं हो सकते।

इसी प्रकार जब दो प्राकृत संख्याओं का गुणा किया जाता है। तो हमेशा प्राकृत संख्या ही प्राप्त होती है और दो भिन्नों का गुणा करने पर भी भिन्नात्मक संख्या ही प्राप्त होती है।

4 × 2 = 8 यानी $n_1 \times n_2 = n_3$

6 × 5 = 30

(1 / 4) × (2 / 3) = (2 / 12) यानी $(a_1 / b_1) \times (a_2 / b_2) = (a_1 b_1 / a_1 b_2)$

प्रश्न : (i) जोड़ व गुणा से संबंधित और उदाहरणों को सोचें तथा भिन्न संख्याओं के संदर्भ में ऊपर कही इन बातों को जाँचे।

(ii) $n_1 + n_2 = n_3$ का क्या अर्थ है? समझाएँ ऐसा लिखने से क्या लाभ है? इसी तरह $(a_1 / b_1) \times (a_2 / b_2)$ का क्या अर्थ है? कक्षा के बच्चों को यह स्वरूप समझने में क्या दिक्कत हो सकती है?

हमने अभी तक जोड़ व गुणा से संबंधित उदाहरणों को देखा। जब पूर्ण संख्याओं पर घटाने की संक्रिया की जाती है तो हमेशा पूर्ण संख्या नहीं मिलती।

भिन्नात्मक संख्याओं में भी घटाव की संक्रिया करने पर हमेशा भिन्नात्मक संख्या नहीं प्राप्त होगी।

5 − 0 = 5,

5 − 3 = 2, 7 − 4 = 3 परन्तु 4 − 9 = ? (पूर्ण संख्या में नहीं है)

4 − 4 = 0

(1 / 2) −(1 / 3) =(3−2) / 2 = 1 / 6

किन्तु $\frac{1}{5} - \frac{4}{5} = ?$ भिन्नात्मक संख्या में नहीं है।

यानी दोनों पूर्ण संख्या समूह व भिन्नात्मक संख्या समूह घटाने की संक्रिया के लिए संपूर्ण नहीं हैं।

जब हम दो प्राकृत संख्याओं को एक दूसरे से भाग करते है तो परिणाम के रूप में हमेशा प्राकृत संख्या नहीं मिलती। जैसे– 8 ÷ 4 = 2 किन्तु 4 ÷ 8 प्राकृत संख्या नहीं है।

परन्तु भिन्नात्मक संख्या में भाग की संक्रिया के बाद परिणाम भिन्नात्मक संख्या ही होगी। जब दो भिन्नात्मक संख्याओं का भाग किया जाता है, तो हमें भिन्नात्मक संख्या ही प्राप्त होती है।

जैसे– (6 / 1) ÷ (2 / 1) = 3 / 1

(6 / 1) ÷ (4 / 1) = 3 / 2

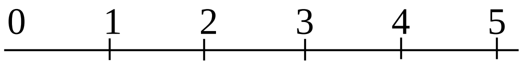
(3 / 2) ÷ (5 / 4) = 6 / 5 ; शर्त सिर्फ यह है कि भाजक संख्या 'शून्य' भिन्न नहीं है।

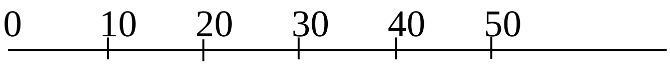
यानी भिन्नात्मक संख्याओं का समूह भाग की संक्रिया के लिए संपूर्ण है।

यहाँ तक हमने देखा कि प्राकृत संख्याओं से भिन्नात्मक संख्याओं की ओर आने पर क्या होता है?

4.6 संख्या रेखा और संख्याएं

एक और क्रिया जो भिन्नात्मक संख्याओं को समझने में मदद करती है, वह है विभिन्न संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन। हम जानते हैं कि प्राकृत संख्याओं अथवा पूर्ण संख्याओं को एक रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। उदाहरण के तौर पर इन दो संख्या रेखाओं को देखें–



और 

दोनों रेखाओं पर हम देख सकते हैं कि बायीं से दायीं ओर जाने में संख्या का मान बढ़ रहा है। हम यह भी देख सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं वाली दूसरी रेखा में 0 से 10 के बीच में 9 संख्याएं हैं और दोनों रेखाओं में 1 व 2 तथा 10 और 20 के बीच की दूरी बराबर है। याने यह दूरी कुछ भी चुनी जा सकती है और इसका कोई निश्चित माप नही है। किन्तु 0 व 1 के बीच और 1 व 2 के बीच कोई प्राकृत संख्या नहीं है। परन्तु अगर हम यह पूछे कि 0 और 1 तथा 1 और 2 के बीच कितनी भिन्नात्मक संख्यायें हैं?

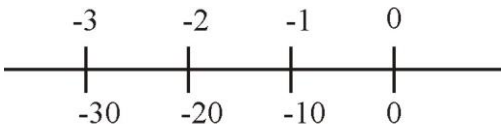
इस पर विचार करने के लिए याद करें कि 2 व 3 के बीच $\frac{5}{2}$ है। और फिर 2 व $\frac{5}{2}$ के बीच $\frac{9}{4}$ है। इस तरह हम 1 व 2 अथवा, 2 व 3 के बीच तथा फिर 2 व $\frac{9}{4}$ के बीच जितनी मर्जी चाहे उतनी भिन्नात्मक संख्याएं ढूंढ सकते हैं। इस तरह क्या हम कह सकते है कि दो प्राकृत संख्याओं के बीच अनगिनत भिन्नात्मक संख्याएं आती है?

अभ्यास : 0 और 1 तथा 1 और 2 के बीच कितनी भिन्नात्मक संख्याएँ हैं अपने उत्तर का कारण बतायें और

बच्चों को यह अहसास दिलाने के लिए आप क्या गतिविधि व चर्चा करेंगे?

संख्या रेखा पर भिन्नात्मक संख्याओं को जमाने के समय यह देख सकते हैं कि कौन सी संख्या बड़ी है, कौन सी छोटी। हमें पता है कि दाएं जाते समय संख्याएं बढेंगी और बाएं लौटते समय घटेंगी। इस तरह भिन्नात्मक संख्याएँ देखने पर हमें यह पता चलता है कि दो प्राकृत संख्याओं के बीच अनगिनत भिन्नात्मक संख्याएँ होती है।

ऋणात्मक संख्याएँ : यह स्वाभविक प्रश्न है कि शून्य के दूसरी तरफ क्या है? सिर्फ दाएँ क्यों बढ़ें? ऋणात्मक संख्याओं का समूह '0' से शुरू हो कर बायी और जाता है। बायीं और बढ़ते–बढ़ते यद्यपि संख्या बडी होती प्रतीत होती है, ऋणात्मक होने के कारण वास्तव में वह घटती जाती है।

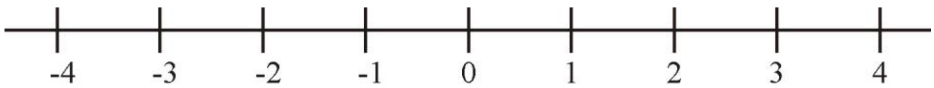


इसमें $-5 > -7$ या फिर $-12 > -30$ आदि। दो क्रमागत संख्या यथा -5, -6 के बीच में हालांकि कोई धनात्मक पूर्णांक नहीं है किन्तु बहुत सारी और ऋणात्मक संख्याएँ है, जैसे -1, -2 के बीच $\frac{-5}{4}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{7}$ आदि।

पूर्ण संख्याओं से बड़े समूह की बात करें, तो एक समूह पूर्णांक का भी है इसमें धनात्मक व ऋणात्मक दोनों प्रकार की संख्याएँ आती हैं। पूर्णांकों को I से प्रदर्शित किया जाता है।

$\{I = \ldots\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

इसका तात्पर्य यह है कि पूर्णांकों में पूर्ण संख्याएँ समाहित है। प्राकृत व पूर्ण के समान सभी पूर्णांक संख्याओं पर भी संक्रियाओं के बारे में सोच सकते हैं।



जब दो पूर्णांक संख्याओं की जोड़ की जाती है, तो हमेशा पूर्णांक संख्या ही प्राप्त होती है।

जैसे– $-2 + 2 = 0$

$-3 + (-5) = -3 - 5$

$= -8$

$-1 + (-6) = ?$

यहाँ पर प्राप्त हुई सभी संख्याएँ पूर्णांक ही है तथा यह जोड़ने की प्रक्रिया के लिए सम्पूर्ण भी है।

इसी तरह जब हम पूर्णांकों का घटाव करते हैं, तो हमेशा पूर्णांकों की ही प्राप्ति होती है।

जैसे–

$-3 - (-2) = -3 + 2 = -1$

$+5 - 2 = 3$; $-4 - (-1) = ?$

यहाँ पर होने वाली संक्रिया, पूर्णांकों के घटाव के लिए सम्पूर्ण है।

प्रश्न : (i) पूर्णांकों की जोड़ व घटाव के और भी उदाहरण सोचें तथा ऊपर बताई गई बातों की जाँच करे।

(ii) $I_1 + I_2 = I_3$ का क्या अर्थ है? ($I_1, I_2, I_3 \varepsilon I$)

$I_1 - I_2 = I_3$ क्या यहाँ दिया गया कथन सही है? क्यों?

हमने अभी तक जोड़ व घटाव को पूर्णांक से सम्बन्धित समझ को विकास करने का प्रयास किया तथा उसे उदाहरणों की सहायता से समझा। इसी तरह जब हम पूर्णांकों का गुणा करते हैं तो हमेशा पूर्णांक की ही प्राप्ति होती है। जैसे–

$-2 \times 1 = -2$; $-3 \times -4 = +12$

$+4 \times -2 = ?$; $-5 \times -7 = ?$

यथा यहाँ पर पूर्णांक गुणा की संक्रिया के लिए सम्पूर्ण है।
याने $I_1 \times I_2 = I_3$

अभ्यास :

1. यहाँ तक हमने देखा कि पूर्णांकों में जोड़, घटाव व गुणा करने पर पूर्णांक ही प्राप्त होते हैं। किन्तु अगर दो पूर्णांकों का भाग किया जाये, तो क्या परिणाम प्राप्त होता है?

   जैसे– $-2 \div 5 = ?$, $4 \div -2 = ?$,

   यहाँ पर जो परिणाम प्राप्त होते हैं, क्या वह सभी पूर्णांक है? इसे आप कैसे लिखेंगे और क्या यह भाग के लिए संपूर्ण है।

2. क्या आपको लगता है कि हम पूर्णांकों को भी संख्या रेखा पर प्रदर्शित कर सकते हैं? हाँ तो किस तरह?

3. भिन्नात्मक संख्याओं को $\frac{I_1}{I_2} (I_2 \neq 0)$ अथवा $\frac{w_1}{w_2} (w_2 \neq 0)$ की तरह व्यक्त करने से उनमें क्या फर्क आ जाता है? समझाएँ।

4.7 भिन्नात्मक संख्याओं से परिमेय संख्याओं की ओर

हमने भिन्नात्मक संख्याओं में देखा कि यह $\frac{w_1}{w_2}$ होती है, जहाँ पर w_1 व w_2, पूर्ण संख्याओं को निरूपित करते हैं और w_2 शून्य नहीं है। यह सारी संख्याएँ धनात्मक हैं। पर फिर $\frac{-3}{4}$ अथवा $\frac{-7}{-9}$ के लिए भी कुछ नियम खोजने हैं। एक ऐसा समुच्चय चाहिए जिसमें ऋणात्मक व धनात्मक दोनों प्रकार की भिन्ने आ जाती हैं। ऋणात्मक व धनात्मक भिन्नों के समूह को एक नये समुच्चय में देखा जाता है, जिसे परिमेय संख्याएँ कहते हैं। परिमेय संख्याओं के समूह में सभी पूर्णांक

संख्याएँ तथा धनात्मक व ऋणात्मक भिन्न आ जाते हैं। जैसे–

$\frac{-3}{2}, \frac{-4}{7}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{0}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ इत्यादि। इसे हम लिखेंगे $\frac{I_1}{I_2}$ जहाँ $I_2 \neq 0$

जब हम परिमेय संख्याओं की संक्रियाएँ करते हैं, तो हमें हमेशा परिमेय संख्या ही प्राप्त होती है। परिमेय संख्या को हम Q से दर्शाते हैं। तथा Q में N, W, I, F , -F सभी समूह आते हैं। यहाँ पर हम कुछ उदाहरणों पर नज़र डालते हैं–

(i) $\frac{-3}{2} + 2 = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$

(ii) $3 + \frac{1}{4} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4}$

(iii) $-1-(-4)=3$

(iv) $\frac{1}{2}, (-1)=\frac{-1}{2}$

(v) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

(vi) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{2}$

यहाँ पर हमने यह देखा कि परिमेय संख्याओं पर की संक्रियाओं में हमेशा परिमेय संख्या ही प्राप्त होती हैं। तथा इसे हम निम्न प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं–

(i) $\frac{q_1}{q_2}=q_3$ (ii) $q_1-q_2=q_3$

(iii) $q_1+q_2=q_3$ (iv) $q_1 \times q_2=q_3$

इन कथनों को कुछ उदाहरण ले कर जाँच लो। इनमें q_2 पर कुछ शर्तें भी हो सकती हैं। कहाँ–कहाँ और क्या शर्तें हैं?

4.7.1 परिमेय संख्याएँ और संख्या रेखा

जैसा कि हमने पहले देखा कि परिमेय संख्याएँ पूर्णांकों तथा भिन्नात्मक संख्याओं से मिलकर बनी होती है। हम इन संख्याओं को संख्या रेखा पर 0 के दोनों ओर प्रदर्शित कर सकते हैं। चूंकि इनमें धनात्मक और ऋणात्मक दोनों प्रकार की संख्याएँ आती हैं। जैसे $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ आदि, यह समूह संख्या रेखा के दोनों ओर उपस्थित है।

4.8 भिन्नात्मक संख्या का उपयोग :

भिन्नात्मक संख्याओं का उपयोग हम दैनिक जीवन में जाने–अनजाने करते है। सुबह के रसोईघर के काम से लेकर रात को सोने तक हम भिन्नों का किसी ना किसी रुप में उपयोग करते है। जैसे– रसोईघर में सुबह की चाय बनाते वक्त अगर हमें एक ही कप चाय बनानी है तो हम $\frac{1}{2}$ कप दूध, $\frac{1}{2}$ चम्मच शक्कर, $\frac{1}{2}$ चम्मच चाय की पत्ती और $\frac{1}{2}$ कप पानी की आवश्यकता होती है। यहॉ पर हम भिन्नों का उपयोग कर रहे है।

जब हम दवाई खाते है तो कितनी ही बार $\frac{1}{2}$ दवाई ही खाते है और तो और बच्चों को तो ज्यादातर दवाई का $\frac{1}{2}$ टुकड़ा ही दिया जाता है। यह टुकडे भी भिन्न द्वारा निरुपित होते हैं। इसी तरह घडी में समय देखते वक्त, किसी वस्तु को बांटते समय, कपडे को काटते समय हम भिन्नों का ही तो उपयोग करते हैं।

प्रश्न : इसी तरह के दैनिक जीवन से संबंधित भिन्नों के और उपयोगों को खोंजे तथा व्याख्या कीजिये कि वंहा पर भिन्नों का उपयोग किस तरह हो रहा है?

हालांकि ऋणात्मक संख्याओं व अन्य ऋणात्मक परिमेय संख्याओं का सामान्य जीवन में उपयोग कम होता है। हिसाब किताब करते समय ताप, मापकर उसे ऊँचाई–गहराई आदि लिखित प्रतीकों में अंकित करते समय इसकी जरूरत पड़ती है। आगे के हिस्से में हम धनात्मक परिमेय संख्याओं अर्थात भिन्नात्मक संख्याओं पर ही चर्चा करेंगे।

4.9 भिन्न के विभिन्न अर्थ

4.9.1 भिन्न व भाग

भाग का उपयोग हम बाँटने में हिस्से के निर्धारण के लिए करते हैं। भाग के सवाल को भी हम भिन्न के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

जैसे– 15 मिठाईयों को 5 लोगों में बाँटना है। इसका मतलब प्रत्येक को 15 ÷ 5 मिठाई मिलेगी। भिन्न में बटा का चिह्न भाग को ही बताता है। हम 15 ÷ 5 को $\frac{15}{5}$ भी लिख सकते हैं। हम कह सकते हैं कि प्रत्येक को $\frac{15}{5}$ मिठाई मिली।

इसी तरह 5 रोटी दो लोगों में बाँटे तो प्रत्येक की $\frac{5}{2}$ रोटी मिलेगी। इसका अर्थ यह हुआ कि भिन्नात्मक संख्या का एक अर्थ भाग को प्रदर्शित करने में हैं।

4.9.2 गणक के रूप में भिन्न

किसी समूह के हिस्से को ले कर उस पर गणना करनी हो तो भी भिन्न का उपयोग करेंगे। जैसे आधा दर्जन केले अथवा $\frac{3}{4}$ किलो आलू का दाम। आगे बढें तो अगर एक किलो आलू की कीमत 20 रुपये है तो $\frac{3}{4}$ किलो आलू की कीमत क्या होगी? इस सवाल के लिए हम कहेंगे

कीमत 20 का $\frac{3}{4}$ रुपये होगी। इसी तरह किसी कमरे में बैठे लोगों में से आधी महिलायें हैं तो इसे हम कमरे में उपस्थित लोगों का $\frac{1}{2}$ कहेंगे।

4.9.3 पूर्ण का हिस्सा

यह भिन्न की सामान्य स्थिति है, जब हम किसी मात्रा को पूर्ण से जोड कर देखते हैं। ये पूर्ण एक वस्तु भी हो सकती है और एक समूह भी। जैसे – $\frac{5}{6}$ भिन्न का मतलब हो सकता है कि किसी एक वस्तु को 6 भागों में बांट दिया हो तथा उसमें से 5 भाग ले लिए गये हों। या 6 सेबों के समूह में से 5 सेब किसी ने ले लिये हों, यह दोनों एक के 6 में से 5 भाग $\frac{5}{6}$ को द"ाते हैं।

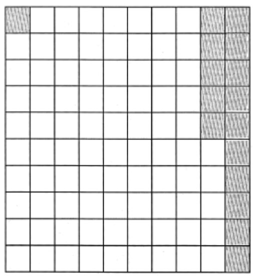
4.9.4 अनुपात

भिन्नात्मक संख्याओं को अनुपात के रुप में भी देखा जाता है। जैसे– दो दोस्तों के महीने के मेहनताने का अनुपात 2:3 है, इसे हम $\frac{2}{3}$ के रुप में भी लिख सकते हैं। इसी तरह कभी–कभी हम किसी पूर्ण के हिस्से की तुलना भी अनुपात से कर सकते हैं। जैसे प्रतिशत यह 100 हिस्सों में से कितने हिस्से हैं यह भी कह सकते है।

4.9.5 मापक

यह आधा या चौथाई को मापने की तरह ही है। जैसे– आधा मीटर या आधा किलो या $\frac{1}{10}$ सेमी.। और हम कह सकते हैं कि इस दूरी में 5 आधे मीटर हैं।

4.10 दशमलव संख्या



दशमलव की अवधारणा एक महत्वपूर्ण अवधारणा है, जिसे दशमलव संख्या या दशमलव भिन्न भी कहा जाता है। इस तरह की संख्या में एक संकेत दशमलव बिन्दु (.) होता है, जो यह दर्शाता है कि बिन्दु के बाएँ ओर पूर्णांक भाग तथा दाएँ ओर पूर्ण के हिस्से हैं। इस तरह दशमलव बिन्दु पूर्णांक को हिस्सों से अलग करता है। जैसे– 2.7 में 2 पूर्ण हैं और .7 पूर्ण के हिस्से दिखाता है।

इस तरह दशमलव बिन्दु का इस्तेमाल करके दशमलव प्रणाली (Decimal system) में हम बहुत सी संख्याओं को लिख सकते हैं।

4.11 दशमलव भिन्नें :

अब देखते हैं कि $2\frac{3}{4}$ का मतलब क्या है?

क्या $2\frac{3}{4} = 2 + (3/4)$ और $(2+.75)$ समतुल्य हैं?

हम जानते हैं कि दशमलव भिन्न संख्याओं में किए गए भाग 10 के गुणांक हैं, यानी 10, 100, 1000 ... है। हर बार हिस्से को 10 गुणा और भाग किए चार्ट पर रख कर देखा जाता है कि वह कितना है। इस स्थानीय मान की समझ के लिए आइये कुछ उदाहरण देखें।

संख्या 222 को हम इस तरह से लिख सकते हैं :

(2 × 100) + (2 × 10) + (2 × 1) यानी 200 + 20 + 2

हम जानते हैं कि जब बायीं से दाई तरफ जाते है तो मान 10 गुना बढता जाता है जैसे 1, 10, 100, 1000 लेकिन जब हम दायीं से बायीं तरफ आते है तो यह 10 गुना कम होता जाता है यानी यदि हज़ार से शुरू करें तो .. 1000, 100, 10, 1 ..

इसे हम ऐसे भी लिख सकते हैं 1000, $\frac{1000}{10}$ (यानी 100) $\frac{100}{10}$ (यानी 10) और $\frac{10}{10}$ यानी 1 और फिर $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ... आदि।

उदाहरण के लिए 25.25 को हम ऐसे भी लिख सकते हैं

(2 × 100) + 5 × 1) + $+ 2 \times (1/10) + 5 \times (1/100)$

अभ्यास :

(i) 3025.053 को कैसे लिखेंगे?

(ii) 0.012 को कैसे लिखेंगे?

(iii) 0.1 बड़ा है या .09 कैसे पता करेंगे?

4.12 बच्चों को भिन्नात्मक संख्याएँ सिखाना

भिन्नात्मक संख्याएँ क्या होती है व उनका दशमलव बिन्दु के प्रयोग से क्या संबंध है, हमारा इन सब को समझना आवश्यक है तभी हम बच्चों की मदद कर पाएँगे व उनके सीखने में आ रहे रोड़ों को पहचान कर उन्हें हटा पाएँगे। अगर आप कक्षा 7 व 8 के भिन्नात्मक व परिमेय संख्याओं के आधार पढ़ेंगे और उनके अभ्यास करेंगे तो बच्चों को सीखाने में मदद होगी।

हम जानते हैं कि प्राथमिक कक्षाओं में गणित सीखने–सीखाने में ठोस मूर्त अनुभवों की भूमिका महत्वपूर्ण होती हैं। विद्यालय में बच्चों के साथ गणित की विभिन्न अवधारणाओं पर काम करते हुए आपने यह महसूस भी किया ही होगा।

बच्चे भी अपने दैनिक जीवन में कई बार भिन्न संख्याओं का उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए जब ऐसी चर्चा होती है, ''आधी कचौड़ी खाउँगी'' अथवा ''आधा किलो चावल देना'', तो ये भिन्न संख्याओं का प्रयोग है। रोज़मर्रा के उपयोग में यह जरूरी नही है कि उपयुक्त तरीके से मापकर, बिलकुल सही मा्त्रा् में मांगी गयी चीज मिले। आपको ऐसे भी अनुभव हुये होंगे कि किसी

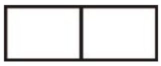
बच्चे को एक रोटी या टॉफी के दो टुकड़े करके एक टुकड़ा दिया तो वह मान लेता है कि उसे आधी रोटी या आधी टॉफी मिली है। (जब तक की हिस्सों में बहुत ही ज्यादा फर्क ना हो)। यहाँ पर बच्चा 'आधा' शब्द का उपयोग तो करता है परन्तु वह यह नहीं देखता कि रोटी या टॉफी का हिस्सा सचमुच में आधा है, लगभग आधा है या हिस्सा मात्र ही है।

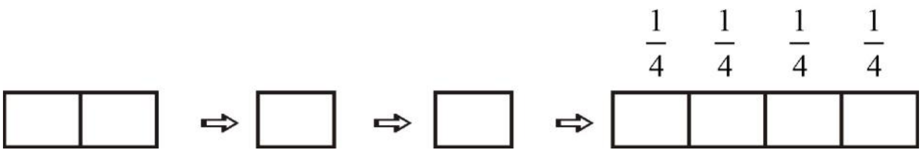
लेकिन गणित में $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{1}{4}$ आदि की बात करते वक्त हिस्सों का सही होना यानी बराबर आधा व चौथाई होना आव”यक है।

विद्यालय में भिन्न सीखने की शुरुआत अमूमन कक्षा तीन–चार से होती है ऐसा नहीं है कि इससे पहले बच्चों को भिन्न के बारे में कोई अनुभव नहीं होता, लेकिन जो भी अनुभव होता है वह बहुत सीमित होता है। बच्चे आधा, चौथाई, पाव, आधा पाव इत्यादि शब्दों के बारे में जानते है, उनका प्रयोग भी करते हैं लेकिन एक गणितीय अवधारणा के रूप में इनको समझने व दिमाग में उसकी एक छवि बनाने के लिए व्यवस्थित ठोस अनुभवों की जरुरत होती है। बच्चों को यह समझना होता है कि वस्तु के किसी भी हिस्से को आधा नहीं कह सकते, इन का बराबर होना जरुरी है। इसी तरह किसी भी हिस्से को चौथाई नहीं कहा जा सकता, चार बराबर हिस्सों में से लिया गया एक हिस्सा ही चौथाई होगा। यह भी समझना होता है कि हिस्सा किसका है? यानी पूर्ण क्या है?

यहाँ पहले हम बराबर हिस्से की अवधारणा के सन्दर्भ में बात करेंगे व फिर पूर्ण के बारे में।

उदाहरण : हम बच्चों से यह क्रिया करने को कह सकते हैं– एक आयताकार काग़ज़ की एक के आमने–सामने के किनारों को मिलाकर इसे दो बराबर भागों में मोड़ें व फिर खोल लें। पूरा कागज दो बराबर भागों में बंट जाता है यानी इसका प्रत्येक हिस्सा आधा है।

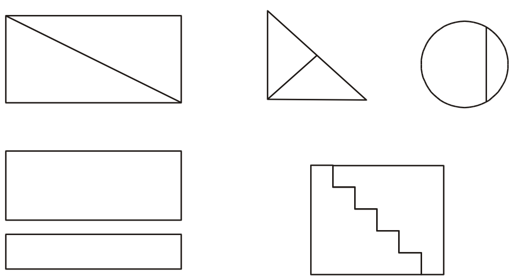




अब इसे फिर से मोड़ते हैं। लेकिन अब दो बार मोडना है। चित्र के अनुसार अब इस काग़ज़ को खोलें। पूरा काग़ज़ एक आकार के चार बराबर भागों में बँट जाता है। यहाँ प्रत्येक भाग एक चौथाई है।

एक और उदाहरण देखें :

सवाल पूछा गया, इनमें से कौन सी आकृतियाँ दो बराबर भागों में बँटी हुई है?



बच्चे ने जवाब दिया– (a) और (b)। (c), (d) और (e) बराबर भागों में नहीं बँटी हुई है।

तुम कैसे कह सकते हो कि (e) के दोनों भाग बराबर नहीं हैं?

बच्चा– में पक्का कह सकता हूँ कि (e) के दोनों भाग बराबर नहीं है।

अच्छा ठीक है। चलो हम (e) की आकृति वाला एक काग़ज़ लेते हैं तथा इसे आकृति में दिखाई रेखा के अनुसार काट देते हैं। अब हमारे पास दो टुकड़े हो गये है– इन टुकड़ों को एक–दूसरे के ऊपर ज़माते हैं। क्या एक टुकड़ा–दूसरे के ऊपर ज़म जाते हैं?

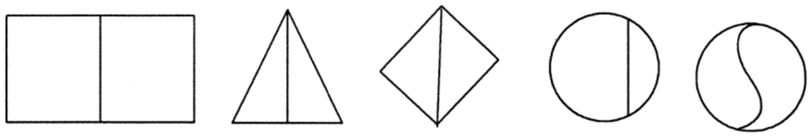
बच्चे ने कहा– हां यह टुकड़े तो एक–दूसरे के ऊपर ज़म गये हैं। इसका मतलब यह भी आपस में बराबर है। अब बच्चा स्वयं जवाब दे रहा था।

उसे इस क्रिया से यह समझ आ गया था कि आधा हमेशा ठीक वैसा नहीं दिखता।

इसी के साथ साथ चित्रों की भी मदद ली जा सकती है। जैसे उन्हें कुछ इस तरह के अभ्यास भी दिए जा सकते हैं।

(i) दी गयी आकृतियों के दो बराबर हिस्से करो। (आप कोई भी सरल आकृतियाँ दे सकते हैं।)

(ii) दी गई आकृतियों में से कौनसी आधी–आधी बटीं हैं?



(iii) दी गयी आकृतियों के चार बराबर हिस्से करों इत्यादि। क्या तुम बता सकते हो कि इसमे से एक चौथाई हिस्सा कौनसा है?

चित्रों के साथ काम करते हुए भी बच्चों को यह समझना होता है कि पूछा गया हिस्सा प्रदर्शित करने के लिए वे दी गयी आकृति/अथवा कागज़ को कहाँ से व कैसे मोडेंगे? जैसे $\frac{1}{3}$ प्राप्त करने के लिए कैसे और $\frac{1}{6}$ प्राप्त करने के लिए कैसे? और इस हेतु बच्चों को पर्याप्त समय तथा विभिन्न तरह के अभ्यासों की आवश्यकता होगी तथा कुछ इस तरह के अभ्यास भी मददगार हो सकते हैं जिनमें बच्चों को कागज से कुछ वस्तुएं बनानी हो और इस तरह के कार्य को करते हुए वे यह भी समझ सकते है कि आधा, चौथाई कितना होता है।

अभ्यास :

(i) आप बच्चों के साथ भिन्न संख्याओं की शुरुआत कैसे करते हैं?

(ii) बच्चों के साथ भिन्न सख्याओं पर कार्य करने के अपने अनुभवों को याद कीजिये और बताइये की बच्चों को भिन्नों के सन्दर्भ में कहाँ कहाँ ज्यादा मदद की जरुरत पड़ती है।

(iii) कक्षा 4–6 की पुस्तकों में दिए कौन से अभ्यास बच्चों को बराबर हिस्सों की अवधारणा सीखने में मदद करते हैं? 5 अभ्यास चुनिएँ।

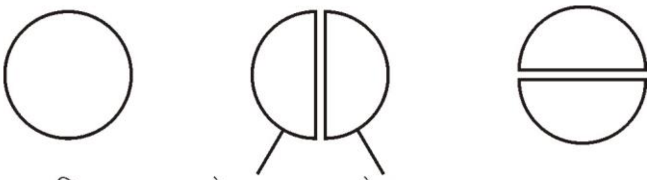
प्रश्न : आप यह बताइये कि कागज़ को मोड़कर आप बच्चों को भिन्न संख्याओं का प्रतीकीकरण सिखाने में मदद कैसे करेंगे?

प्रश्न : कक्षा में भिन्न पढ़ाने के अपने तरीके की सफलता का मूल्यांकन आप कैसे करेंगे?

4.12.1 टुकड़े कैसे करें

बच्चों को कई बार आधे को समझने में दिक्कत आती है। उन्हें यह जानने के विभिन्न अवसर चाहिए कि दो हिस्से कब बराबर हैं और कब नहीं? यह हमेशा जरुरी नहीं है कि सभी बराबर हिस्सों की आकृतियां एक समान हो और वो एक दूसरे पर बैठ जायें। अक्सर आकृति दिखते समय हम कुछ वि"ोष आकारों का उपयोग करते हैं। इस से यह धारणा बैठ जाती है कि आधा, चौथाई आदि आयत और वर्ग के होते हैं और वो भी एक ही तरह से। इसके लिये कई तरह की गतिविधि की जा सकती है।

प्रश्न : अपनी कक्षा में कार्ड बोर्ड की एक डिस्क बनाएँ। बच्चों से भी इस तरह की डिस्क बनाने व फिर उसे दो हिस्सों में बाँटने के लिए कहें। उनसे कहें कि वे यह देखें कि अलग–अलग बच्चों ने यह काम कैसे किया।



यहाँ चर्चा हो सकती है कि कौनसा सही है? इसे समझाने के लिए और भी तरीकों से आधा–आधा करने को कहे व दिखाएँ।

क्रियाकलाप 1 : एक बड़ा कागज़ और तीन–चार टुकड़े लें। उन्हें अपनी कक्षा के बच्चों को दीजिए और कहिए कि कौनसे टुकड़े बड़े कागज़ के आधे है व कौनसे नहीं? इस पर भी उनसे चर्चा करें कि उन्होंने यह कैसे पता लगाया।

क्रियाकलाप 2 : एक रिबन अथवा रस्सी को दो बच्चों को दें और उनसे कहें कि इसे बराबर भागों में आपस में आपस में बाँट लें। जब वे उसे बाँट ले, तब उनसे कहिए कि वे जाँच करें कि क्या दोनों हिस्से वास्तव में बराबर है? बच्चों के प्रयासों का विश्लेषण कर निष्कर्ष लिखिए।

4.12.2 पूर्ण की समझ

टुकड़े करते समय पूर्ण की समझ व 1 वस्तु के कितने बराबर टुकड़े करने हैं यह समझ होना आवश्यक है। कुछ सवाल बच्चों से पूछे जा सकते हैं। यहां दिए सवाल सिर्फ इशारा करने के लिए हैं कि भिन्नात्मक संख्याओं को समझने में किस तरह की बातों पर सोचना चाहिए।

आधे का आधा कितना होगा?

एक का आधा कितना होगा?

और दो का आधा?

क्या तीनों आधों द्वारा जो मात्रा दर्शाई जायेगी बराबर होगी या फरक फरक होगी।

चर्चा करें उन्होंने क्या सोचकर ऐसा निष्कर्ष निकाला? यह चर्चा करें कि हालांकि $\frac{1}{2}$ केले और $\frac{1}{2}$ दर्जन केले में $\frac{1}{2}$ एक ही जैसे लिखा जाता है, परन्तु आधे दर्जन केले आधा केला नहीं है। अतः पूर्ण की और ध्यान देना व उसकी समझ बहुत जरूरी है। इबारती सवालों में इस तरह के उदाहरण रखना व उन पर चर्चा करना बच्चों को समझने में मदद देगा। सही मायनों में भिन्न के उपयोग को तभी समझा जा सकता है, जब यह समझ आ जाये कि वो हिस्सा किसका है? और उस पूर्ण का क्या मान है।

इस तरह का अभ्यास यह भ्रम पैदा कर सकता है कि पूर्ण कुछ ही तरह के हो सकते हैं अतः अलग–अलग तरह के पूर्ण लेकर कार्य करने की जरूरत है। यह भी आवश्यक है कि वह भिन्न की संख्या को अलग तरह में देख पाएँ। जैसे $\frac{3}{4}$ को एक वस्तु को चार भागों में बाँटकर इसमें से तीन भाग ले या चार वस्तुएँ में से तीन ले लिए गये या यह भी हो सकता है कि तीन पूरी वस्तुओं को चार बराबर भाग में बाँट कर एक एक भाग हरेक से लेना। बच्चों को समझने की जरूरत है।

4.13 भिन्नात्मक संख्याएँ व उनकी शब्दावली :

एक महत्वपूर्ण बात यह है कि जब बच्चों के साथ बातचीत हो, तब भाषा का प्रयोग ध्यान से हो। कई बार बच्चे आधे, एक पाव, तीन पाव, इत्यादि शब्दों व कभी कभी इनको निरुपित करने वाली मात्राओं से भी परिचित होते हैं। लेकिन जब कक्षाओं में एक बटा दो, एक चौथाई, तीन चौथाई शब्दों का प्रयोग किया जाता है तो वे समझते हैं कि यह ऐसा कुछ है जिसके बारे में वे कुछ जानते ही नहीं हैं। यह आवश्यक है कि बच्चे जो शब्द जानते हैं की मदद ले कर जो शब्द उनको नए सीखने हैं की और बढ़े ताकि वे उनमे जुड़ाव समझ पाएं जिससे और नए शब्दों के अर्थ पकङ सके। कई बार हम शब्दों को सोच समझकर नहीं बोलते यथा "बराबर हिस्सों" की जगह हम सिर्फ "हिस्से" शब्द का या "टुकड़े" शब्द का ही प्रयोग करते है, जिससे भ्रम पैदा होता है। एक महत्त्वपूर्ण बात और है, बच्चों को अवधारणा के सन्दर्भ में भाषा का अधिकाधिक उपयोग करने

के मौके देने की आवश्यकता। ऐसे मौके जहाँ वे इन अवधारणाओं के बारे में दोस्तों से या आपसे बात कर सकें व अवधारणाओं को अपनी तरह से अपने शब्दों में व्यक्त कर सके।

ऐसे भी मौके बनाने चाहिए जिनमें बच्चा बोल अथवा लिख कर शब्दावली का पयोग करे व अपने तर्क रखे।

4.14 बड़ी–छोटी संख्याएँ

प्राकृत संख्याओं में बड़ी–छोटी संख्याएँ पता करने के सरल ढंग है। संख्या देख कर ही पता चल जाता है कि कौन सी बड़ी है और कौन सी छोटी। बच्चों को प्राकृत संख्याओं में बड़ी, छोटी संख्या पता करने व संख्याओं को क्रम में जमाने में परेशानी नहीं होती। हालांकि बड़ी–छोटी संख्या के चिह्न समझने व तीन या उससे अधिक संख्याओं में बड़ा–छोटा पता कर उन्हें क्रम में जमाने के अभ्यास की जरूरत है। यह अभ्यास यदि इबारती सवालों व जीवन के संदर्भों के आलोक में हो तो उन्हें सीखने में मदद मिलेगी।

अभ्यास :

तीन ऐसे सवाल बनाएँ जो जीवन के संदर्भ से उपजे इबारती सवाल हो वे उनमें बड़ी–छोटी संख्या पता करने की जरूरत हो।

ऋणात्मक संख्याओं को शामिल करने के बाद संख्याओं को क्रम में जमाने में बच्चों को यह अहसास करने में समय लगता है कि संख्या का चिह्न महत्वपूर्ण है। चिह्न यदि ऋणात्मक है तो बड़ी दिखने वाली संख्या असल में छोटी है। याने $-1005 < -987$ और $-59795 < 1$ ।

पूर्णांक संख्याओं में बड़ी–छोटी को पहचानना व क्रम में जमाने का कार्य इन बात को समझने में मदद करना है? किन्तु महत्वपूर्ण बात यह है कि यदि चिह्न का ध्यान रखें तो बड़ी–छोटी संख्या का पता देख कर ही चल जाता है।

अभ्यास :

(i) बच्चों का <, > समझने में किस तरह के अनुभव की ज़रूरत है?

(ii) मुँह बंद व मुँह खुला जैसे तथ्यों से किस तरह की समस्या हो सकती है?

भिन्नात्मक संख्या में यह इतना स्पष्ट नहीं है। कई बार तो हम देख कर तय कर सकते हैं कि कौन सी संख्या बड़ी है और कौन सी छोटी। क्या आप सोच सकते हैं कि किन परिस्थितियों में ऐसा होता है? देख कर पता करने में भी किन्तु कई मुश्किलें हैं और हर पर भिन्नात्मक संख्या के यही अर्थ का उपयोग है।

बच्चों का कार्य देखें तो कई बार हम देखते हैं कि प्राकृत संख्या के संदर्भ में उपयोगी समझ को भिन्नात्मक संख्याओं में भी उपयोग कर लिया जाता है। माने $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{7}\frac{1}{4}\frac{1}{11}\frac{1}{9}$ आदि में से $\frac{1}{11}$ सब से बड़ी संख्या है।

अभ्यास 1 : कक्षा 5–7 के बच्चों को इस तरह की एक वर्कशीट दें और उनके किस–किस तरह के नियम उपयोग करते हैं?

अभ्यास 2 : बच्चों द्वारा किए गए कार्य को देख कर पता करें व लिखें कि वह किस–किस तरह के नियम उपयोग करते हैं?।

अभ्यास 3 :क्या आप दो भिन्नात्मक संखाओं का अंतर संख्या रेखा के माध्यम से समझा सकते है? बड़ी संख्या कौन सी है पता करने के लिए आप किस–किस तरह के नियम उपयोग करते हैं?

अभ्यास 4 :

(क) अगर कोई बच्चा यह कहे कि बड़ी–छोटी भिन्नात्मक संख्या का पता करने के लिए

(i) हम हर देखेंगे, हर बड़ा तो संख्या बड़ी और दूसरा कहे कि हर बड़ा तो संख्या छोटी तो आप क्या कहेंगे?

क्या इनमें से कोई भी सही कह रहा है? कारण सहित समस्याएँ कैसे पता करें–

नीचे कुछ और शार्टकर्ट है जो बच्चे बता सकते हैं–

(i) अंश बड़ा तो भिन्न बड़ी

(ii) अंश और हर का जोड़ बड़ा तो भिन्न बड़ी

(iii) जिस भिन्न का अंश उसके हर से ज्यादा बड़ा होगा वह भिन्न बड़ी

(iv) हर समान करके देख सकते हैं

(v) अंश समान करके देख सकते हैं

इसमें पहले दो क्यों सही नहीं है और इन्हें कहने वाले बच्चों को आप कैसे आगे बढाएंगे, इन पर सोचें व साथियों से चर्चा करें।

हर समान करने व अंश समान करने में क्या करना होगा?

$\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{7}$ में कैसे तुलना करें?

हर अथवा अंश समान करने के लिए हमें तुल्य भिन्न बनानी होगी। क्या इसके अलावा कोई और तरीका हो सकता है तुलना का? ध्यान रहे कि भिन्नात्मक संख्या को दशमलव भिन्न के रूप में लिखना भी उनके हर बराबर करना ही है।

अभ्यास :

(i) बच्चों को तुल्य भिन्न कैसे समझाएँगे?

(ii) इसके लिए कक्षा 5–7 की पुस्तकों में दी गई गतिविधियों को पढ़े व उनमें क्या क्रम दिया गया है, लिखें।

(iii) बच्चों के साथ यह क्रिया करें व अपने अनुभवों को लिखें।

4.15 भिन्नों की तुल्यता :

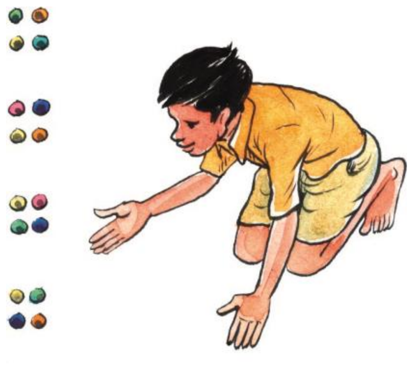
कागज की एक पट्टी लेकर उसे आठ हिस्सों में मोड़ दीजिए। अब बच्चों से कहिए कि आधी पट्टी को अलग–अलग नाम दें। उन्हें ये पता लगाने दीजिए कि पट्टी का वही है जो पट्टी का है एक बटे दो या 1/2 है। इसी प्रकार से एक वर्ग को आठ हिस्सों में मोड़कर पता लगा सकते हैं कि वर्ग का ही वर्ग का और वर्ग का भी होता है। अब इस समय आप आधे, दो–चौथाई, चार–आठवें की तुल्यता (समानता) समझा सकते हैं और लिख सकते हैं कि जिसका मतलब है कि एक–आधा और दो–चौथाई बराबर हैं। अब आप बच्चों से कहें कि वे अपने निष्कर्ष को निम्नानुसार लिखकर बयान करें–

बच्चे इस सूची का अध्ययन करके अंश व हर का पैटर्न देख सकते हैं। खासकर वे यह देख सकते हैं कि प्रत्येक भिन्न में हर, अंश से दुगुना है। आप बच्चों से इसी क्रम का पालन करने वाली अन्य भिन्न संख्याएं बताने को कह सकते हैं। शुरूआत करने के लिए आप अपनी ओर से का सुझाव दे सकते हैं।

इस प्रकार एक बार बच्चों को दिए गए भिन्न के तुल्य भिन्न खोजने का काफी अनुभव हो जाए और वे हर बार तुल्य भिन्नों के बीच के पैटर्न को देख समझ लें तो वे खुद ब खुद तुल्य भिन्न लिखने का नियम यानी अंश व हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करना या दोनों को उनके गुणनखंड से भाग देना खोज लेंगे।

अपनी कक्षा के बच्चों के साथ यह गतिविधि कीजिये। बच्चों के साथ हुए अपने अनुभवों को लिखित व् यह भी बताइये कि बच्चों को कहाँ–कहाँ समझने में कठिनाई हुई व उस सन्दर्भ में आपने बच्चों की कैसे मदद की।

एक और गतिविधि जिसमें शिक्षिका ने अपनी कक्षा में उपलब्ध विभिन्न प्रत्यक्ष चीजों का प्रयोग तुल्य भिन्न की संकल्पना समझाने में किया है।



उदाहरण : शिक्षिका – मेरे पास 32 कंचे हैं। मैं मोहन और सोहन को 16–16 कंचे दे रही हूं।

मोहन, इन 16 कंचों को 4 बराबर भागों में बांटो।

मोहन : (इस तरह बांटकर शिक्षिका को दिखाता है)

0 0   0 0   0 0   00
0 0   0 0   0 0   00
ये चार बराबर हिस्से हो गए।

शिक्षिका : हर हिस्से में कितने कंचे हैं?

मोहन : चार कंचे हैं।

शिक्षिका : एक हिस्सा 16 कंचों का कितना भाग है?

मोहन : यह 16 कंचों का $\frac{1}{4}$ है।

शिक्षिका अब एक अन्य छात्रा रानी को बुलाती है।

शिक्षिका : मोहन, चार में से दो हिस्से रानी को दे दो।

मोहन : जी, मैडम। यानी दो हिस्से रानी को दे देता है।

शिक्षिका : मोहन, यह बताओ कि रानी को तुमने कंचों का कितना भाग दिया है?

मोहन : मैंने उसे सोलह कंचों का $\frac{2}{4}$ दिया है।

शिक्षिका : शाबाश! सोहन, अब तुम अपने 16 कंचों के 8 बराबर हिस्से करो।

सोहन : (00 00 00 00 00 00 00 00 के रूप में बांटता है) हो गया।

तब शिक्षिका ने उससे इस तरह के सवाल पूछे कि हर हिस्से में कितने कंचे हैं? एक हिस्सा कंचों का कितना भाग है? आदि। इसके बाद उन्होंने रीता नाम की एक छात्रा को बुलाकर सोहन से कहा कि वह उसे 8 हिस्सों में से चार हिस्से दे दे। सोहन ने (00 00 00 00) 4 हिस्से रीता को दे दिए।

शिक्षिका: सोहन, यह बताओ कि तुमने रीता को कंचों का कितना भाग दिया है?

सोहन : मैंने उसे 16 कंचों का $\frac{4}{8}$ दिया है।

शिक्षिका : ठीक है। यानी रानी को 16 कंचों का $\frac{2}{4}$ मिला और रीता को 16 कंचों का $\frac{4}{8}$ मिला। तुम दोनों के पास कितने–कितने कंचे हैं (रानी और रीता से सवाल)?

रानी : मैडम, आठ कंचे।

रीता : मुझे भी आठ कंचे मिले।

शिक्षिका: क्या इसका मतलब यह हुआ कि 16 कंचों का $\frac{2}{4}$ और $\frac{4}{8}$ बराबर होता है?

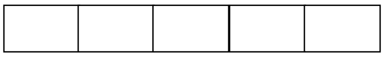
पूरी कक्षा : जी हां, मैडम।

यहाँ तक हमने देखा कि भिन्नात्मक संख्या का क्या मतलब होता है तथा इसे बच्चों को किस तरह सिखाया जाना चाहिये? हमने टुकड़े, आधा, भिन्नात्मक शब्दावली की अवधारणाओं को समझा व उसे बच्चों को स्पष्ट करने का प्रयास किया। हमने तुल्य भिन्न को समझने का प्रयास किया अब यहाँ पर हम भिन्नों की जोड़ व घटाव तथा इसे बच्चों को किस प्रकार सिखाया जा सकता है यह समझने का प्रयास करते हैं ।

4.16 भिन्नों की जोड़ व घटाव

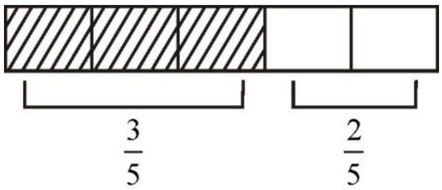
4.16.1 भिन्नों की जोड़

भिन्नों को जोड़ते समय यह समझना आवश्यक है कि दोनों हिस्से मिलकर संख्या बनती है। भिन्न के अर्थ व उसके प्रतीक की समझ होने के बाद ही जोड़ने पर जाना उचित होगा। सामान्य अर्थ में जोड़ने का अर्थ बढ़ना होता है। यह बात प्राकृत संख्याओं के लिए भी सही है और भिन्नों के लिए भी प्राकृत संख्याओं को जोड़ते समय यही करना होता है कि एक बड़े समूह को गिनकर बता दिया कितना हुआ। यह भिन्नात्मक संख्या में नहीं हो सकता। हम $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ को एक साथ नहीं गिन सकते। भिन्नात्मक संख्याओं का जोड़ समझने के लिए हम बच्चों के अनुभव से शुरू कर सकते हैं और इसमें ठोस वस्तु का उपयोग कर सकते हैं जैसे– यदि आधा और आधा पूछा जाए या फिर आधा और चौथाई या चौथाई और चौथाई तो बच्चे बता देंगे कि इन तीनों का क्या मान है। वह कागज के टुकड़ों से इन्हें जोड़ कर भी देख सकते हैं। यह भी देख सकते हैं कि 3 चौथाई हिस्से पौन होते हैं और 3 आधे मिलकर डेढ़ होते हैं। इसके बाद हम चित्रों के उपयोग से और भी संख्याओं पर जा सकते हैं। जैसे उन्हें कह सकते हैं कि वे काग़ज़ का एक टुकड़ा लें तथा उसे पाँच बराबर भागों में बाँट लें



यहाँ पर एक भाग $\frac{1}{5}$ है।

उन्हें यह समझना है कि जिस चित्र में 3 भाग छाँयाकित है तथा 2 नहीं, तो छायांकित भाग $\frac{3}{5}$ दर्शाता हैं।



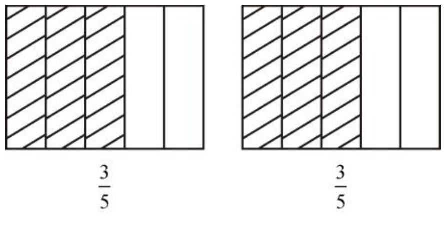
अगर इन दो भिन्नात्मक संख्याओं को जोड़ना हो तो वे देख सकते हैं $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=?$

कुल छांयाकित भाग = 5

सपूंर्ण भाग = 5

याने $\frac{5}{5}=1$ संपूर्ण

और फिर अगर इसे जोड़ना हो $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$ के इसमें देखें तो कुल हिस्से हैं 6 5 हिस्से से एक पूर्ण बना और फिर शेष $\frac{1}{5}$ भाग



इसलिये कुल भाग = $1\frac{1}{5}$ या $\frac{6}{5}$ ।

जैसा पहले भी कहा बीच–बीच में बार–बार इस तरह के अभ्यास कराना मददगार होगा जो दैनिक जीवन से हैं। जैसे आज खीर बनानी है, $1\frac{1}{2}$ लीटर दूध एक दूकान से लिया और $1\frac{1}{2}$ लीटर एक अन्य दूकान से। बताओ कुल कितना दूध लिया?

सब्जी मार्केट से आलिया ने $\frac{1}{2}$ किलोग्राम भिण्डी, $\frac{1}{4}$ किलोग्राम लहसुन, $\frac{3}{4}$ किलोग्राम प्याज खरीदे। बताओ आलिया ने कुल कितने किलो सब्जी खरीदी।

बच्चे अपने–अपने तरीकों से भी डेढ और डेढ जोड़ सकते हैं। आधा, चौथाई और पौन को जोड़ सकते हैं और आपस में चर्चा कर सकते हैं। उसके बाद चित्र बनाकर उनसे इस जोड़ प्रक्रिया पर चर्चा करें।

आप इस तरह के और भी सवाल बना सकते हैं बहुत संभावना है कि बच्चे इनका जवाब दे पाये भी किन्तु मकसद यह है कि वह अपने उत्तर को समझा पाए। आप बच्चों से यह पूछें कि उन्होंने उत्तर कैसे पाया व साथियों को अपना उत्तर वे कैसे समझाएंगे।

यहाँ हमने सामान्य संदर्भ में आने वाली भिन्नों पर चर्चा की है, क्या सभी भिन्नात्मक संख्याओं को ऐसे जोड़ सकते हैं?

आपके स्कूल में प्रयोग आ रही कक्षा चार से छह की पुस्तक को देखिये। उसमें भिन्नों के जोड़ के लिए क्या गतिविधियाँ दी है? इसे पढ़िए व उसका क्रम पहचानने का प्रयास करें।

क्रियाकलाप : भिन्नों की जोड़ सिखाने वाली कोई दो गतिविधि कक्षा में करवाकर अपने अनुभव लिखें।

प्रश्न : असमान हर वाली भिन्नों का जोड़ सीखाने की शुरूआत आप कैसे करेंगे?

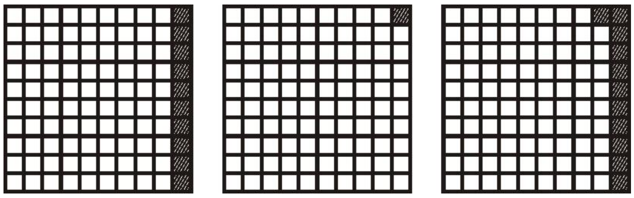
4.16.2 असमान हर की भिन्न का जोड़

अभी तक हमने समान हर की भिन्न के जोड़ की बात की है। अब $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ को कैसे जोड़ें। इसे समझने के लिए मानो हमें $\frac{1}{10}$ और $\frac{1}{100}$ को जोड़ना है।

जोड़ $\frac{2}{10}$ है या $\frac{2}{100}$;

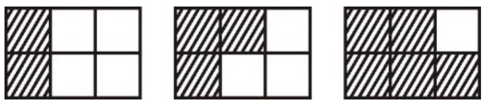
अगर यह दोनों ही गलत हैं तो फिर इन भिन्नों को कैसे जोड़ें? हर का हिसाब कैसे रखें?

इस वर्ग को देखें। इसमें 100 खंड हैं। $\frac{1}{100}$ का अर्थ है इसमें से एक रंगा हुआ है। $\frac{1}{10}$ का अर्थ है इसमें से 10 रंगे हुए हैं। माने अगर दोनों को जोड़ेंगे तो 100 हिस्सों के इस वर्ग के 11 हिस्से रंगे होंगे। याने जोड़ हुआ $\frac{11}{100}$ ।



$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$$

अब इसे देखें। इसमें रंगा हिस्सा $\frac{1}{3}$ है और नीचे वाले में $\frac{1}{2}$ है। साथ रखें तो जोड़ $\frac{5}{6}$ है। क्या आप को लगता है इस तरह से बढ़ने से बच्चों को जोड़ करने के तरीके का आधार समझ आ सकेगा?



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

सामान्य तौर पर हम यह भी जानते हैं कि आधा और पाव मिल कर पौन होता है। यानी $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ इसको भी हम चित्र में रंगे भागों द्वारा दिखा सकते हैं।

चित्रों के और सामान्य अनुभव के उपयोग से हम बच्चों को वह तरीके समझने में मदद कर सकते हैं, जो हम उपयोग करते हैं। इनमें भाषा के ठोस अनुभवों को व्यक्त करना व फिर चित्रों द्वारा प्रदर्शित कर धीरे–धीरे हम उन तरीके की तरफ बढ़ सकते हैं।

4.16.3 तुल्य भिन्न व जोडना–घटाना

हम यह देख ही रहे हैं कि भिन्नात्मक संख्याओं के जोड़ने में हम उनके हरों को बराबर कर यह पता कर पाते हैं कि जोड़ने पर कितने हिस्से रंगे मिलेंगे। यह स्पष्ट है कि जोड़ समझने के लिए आवश्यक है कि हम भिन्नों के हर बराबर कर पाएं। यह बात अगर हम बच्चों के साथ बाँट पाएं और इसे वह अपने शब्दों में व्यक्त कर पाएं तो उन्हें इन संख्याओं से गणित करने में दिक्कत नहीं होगी।

हर बराबर करने का आधार तुल्य भिन्न है। जैसे ऊपर के उदाहरणों में भी स्पष्ट है $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ और $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ आदि।

हम यह भी देख सकते हैं कि पहला जोड़ करने में हमने हर 100 ले कर दोनों की तुल्य भिन्न निकाली। 100 वह संख्या है जिनमें दोनों हरों का भाग जाता है।

यही बात $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{4}$ और फिर $\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{3}$ में है। पहले जोड़ में समान हर 4 और दूसरे में 6 है। उपयुक्त हर को लेने से हम दोनों भिन्नों को एक ही हर मान कर आसानी से लिख पाते हैं।

इसी तरह $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ ले तो हर कितना लेंगे, जाहिर है वह हर जिसमें 3 व 4 दोनों का भाग जाता है, 12 है। अतः समान हर 12 लेना होगा। तो जोड़ी जाने वाली भिन्नों की तुल्य भिन्न के लिए समान हर हमें इसी प्रकार पता करना होगा।

आप देख सकते हैं इस प्रकार धीरे–धीरे चलने से बच्चों को समापवर्तक निकालने का कारण समझ आएगा।

अभ्यास :

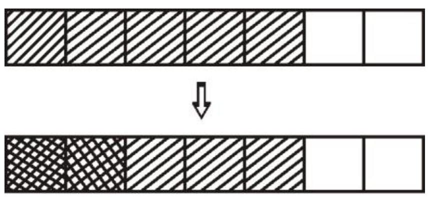
(i) 5 और ऐसे उदाहरण लिखें जिसमें चित्रों से जोड़ के तरीके तक पहुँच सकते हैं?

(ii) भिन्न के जोड़ में लघुतम लेना क्यों जरूरी है, उदाहरण देकर समझाए?

(iii) बच्चों के साथ यह क्रिया करें व अपने अनुभवों को लिखें।

4.16.4 भिन्नों का घटाव

हमें $\frac{5}{7}$ में से $\frac{2}{7}$ घटाना है। हम एक आयताकार टुकड़ा लें तथा उसे 7 समान भागों में बाँट लें। पहले कागज़ के पाँच भागों को छांयाकित करें जो $\frac{5}{7}$ को प्रदर्शित करता है।



$\frac{3}{7}$

फिर इन भागों में से 2 भागों को काटकर अलग करें। शेष छांयाकित भाग कागज़ में $\frac{3}{7}$ भाग को निरूपित करेंगा।

अतः $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$

घटाने की प्रक्रिया में भी जोड़ की तरह ही स्वाभाविक संदर्भों के अलग–अलग उदाहरण से शुरू कर सकते हैं। ध्यान रहे कि बच्चों को सामान्य तौर पर भी घटाने में ज्यादा दिक्कत होती है बनिस्पत जोड़ के। तीन रोटी में से $2\frac{1}{2}$ रोटी रीता ने खा ली, कितनी बची?

या फिर आधे लीटर दूध में से पाव लीटर से चाय बन गई, कितना दूध बचा? हालांकि बच्चों के जीवन में भिन्नात्मक संख्या में घटाने के उतने अवसर नहीं आते फिर भी पूर्णों से शुरू करके टुकड़ों का बचना स्वाभाविक है। 2 लीटर दूध में से पौन लीटर खर्च हो गया, कितना दूध बचा आदि। घटाने में भी जोड़ की तरह ही हिस्से को बराबर करने की जरूरत है। याने $\frac{1}{3}$ में से $\frac{1}{4}$ घटाने के लिए हमें दोनों को और छोटे किन्तु बराबर हिस्सों में बाँटना होगा। तुल्य भिन्न बना कर ही जोड़ और घटाना किया जा सकता है।

भिन्न के घटाने में भी जोड़ जैसी ही प्रक्रिया है। $\frac{1}{10} - \frac{1}{100}$ को हम क्या लिखें? जाहिर है कि यह शून्य नहीं है। इसी तरह $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ क्या है? बच्चे और हम यह भी जानते हैं कि आधे में से पाव खर्च हो जाए तो पाव ही बचता है।

यानी $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ चित्रों द्वारा हम इन सभी उदाहरणों की समझ सकते हैं और यह देख सकते हैं कि $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$ याने $\frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$ और $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ आदि।

अभ्यास :

(i) इन सब के लिए चित्र बनाएँ और यह बताएँ इस पर बच्चों के साथ चर्चा कैसे करेंगे?

(ii) 5 उदाहरण सोचे जिसमें सामान्य तौर पर भिन्नात्मक संख्या घटाने का अनुभव बच्चों को होता है, इनके लिए कैसे चित्र बनेंगे?

हल करें :

1. निम्न को चित्रों की सहायता से जोड़े–

(i) $\frac{7}{9} + \frac{1}{3}$ (ii) $2\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ (iii) $2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}$

2. घटाव करें (चित्र बनाये)।

(i) $1\frac{1}{3} - \frac{4}{7}$ (ii) $\frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

(iii) $\frac{3}{2} - \frac{12}{5}$ (iv) $\frac{12}{15} - \frac{7}{15}$

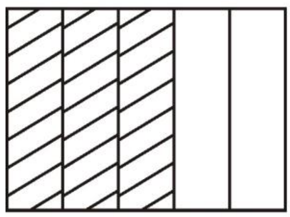
बच्चों को भाषा व चित्रों से आगे बढ़ना ही होता है। इसलिए घटाने के संदर्भ में भी तुल्य भिन्नों के उपयोग की आवश्यकता है।

अभ्यास : एक योजना बनाएँ जिसमें बच्चों को यह सब समझने का रास्ता दिखे। इसमें कम से कम तीन अलग–अलग गतिविधियाँ हों। इसे बच्चों के साथ करें व अनुभव लिखें।

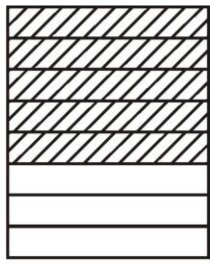
4.17 भिन्नात्मक संख्याओं का गुणा व भाग

4.17.1 भिन्नात्मक संख्याओं का गुणा

सामान्य संख्याओं में गुणा करना आसान है। सब जानते हैं कि गुणा के व्यावहारिक संदर्भ बहुत से हो सकते हैं किन्तु इस की व्याख्या प्राकृत संख्याओं में यह भी समझ जाती है। एक संख्या तो बताती है कितने समूह हैं दूसरी बताती है कि समूह कितना बड़ा है यानी 5 × 4 में साइज 4 है और समूह 5 याने इस का अर्थ है चार का पाँच गुणा $4\times(1/2)$ का अर्थ है आधे का चार गुणा और $(1/2)\times 8$ यानी 8 का $\frac{1}{2}$ इस सब पर चर्चा करने व अभ्यास के बाद हम $(3/5)\times(5/8)$ तक आते हैं।



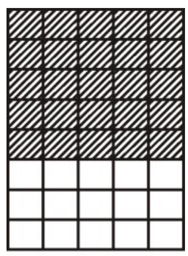
$\frac{3}{5}$



$\frac{5}{8}$

हमें $\frac{3}{5}$ और $\frac{5}{8}$ का गुणा करना है।

ऐसी स्थिति में यह बताएँ कि $\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}$ का अर्थ है $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ भाग।



$\frac{15}{40}$

अतः पहले $\frac{6}{8}$ का $\frac{1}{5}$ भाग लें।

अर्थात् $\frac{5}{8}$ का $\frac{1}{5}$ भाग $=\frac{5}{40}$ भाग।

फिर वैसे 3 भाग लें तो $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ भाग मिलेगा।

कक्षा 6 व 7 में इस तरह के मसलों पर चर्चा व बच्चों से ऐसे कथन बनवाने का प्रयास करना है।

4.17.2 भिन्नात्मक संख्याओं का भाग

सामान्य तौर पर भाग का अर्थ बराबर बंटवारे अथवा कोई संख्या कितने गुणा दूसरी संख्या से बड़ी है आदि संदर्भों में किया जाता है। प्राकृत संख्याओं में भाग करना व समझना भिन्नात्मक संख्या से अपेक्षाकृत सरल होता है किन्तु उसमें भी बच्चों को कठिनाई होती है। अतः भाग के संदर्भ में ठोस वस्तुओं से अभ्यास और सार्थक संदर्भ युक्त भाषा उपयोग के अभ्यास की आवश्यकता है। भिन्नात्मक संख्याओं में भाग को समझने के लिए आवश्यक है कि भाग का संदर्भ स्पष्ट हो और भाग के कथनों हेतु बच्चे सवाल बना पाए और इसका उलटा भी कर पाएं। उदाहरण के लिए अगर यह सोचं की $4 \div (1/2)$ का क्या अर्थ है तो इस तरह के कुछ कथन बन सकते हैं, चार में कितने आधे आते हैं? अथवा 4 केलों को कितने लोगों को आधा–आधा केला देना है। कितने लोगों को $\frac{1}{2}$- $\frac{1}{2}$ केला दे पाएंगे।

अभ्यास :

पाँच और ऐसे सवाल सोचें जिनमें भिन्नात्मक संख्या में भाग करना हो अगर हमें $(1/2) \div (1/3)$ करना हो तो जाहिर है कि ऊपर दिया गया कथन उचित नहीं है। हमें कुछ और सोचना होगा। एक कथन जो हम बना सकते हैं वह यह है कि आधे में कितने एक तिहाई आते हैं? यहाँ आवश्यक नहीं कि तिहाई की संख्या दर्ज संख्याओं में हो। भिन्नात्मक संख्याओं में भाग को समझने का यह एक ढंग हो सकता है। या फिर सवा दो लीटर दूध से आधे लीटर के कितने मग भरे जा सकते हैं?

अभ्यास : ऐसे 5 और कथन सोचें? भाग का एक और अर्थ है गुणा का प्रतिलोम। अगर हम यह देखें कि

2 आधे एक संपूर्ण बनाते हैं।

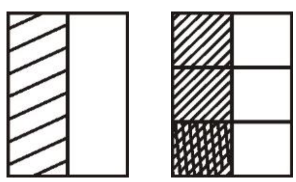
3 तिहाई एक संपूर्ण बनाते हैं।

$\frac{1}{2}\times 2=1$, $\frac{1}{3}\times 3=1$ आता है।

हम यह भी जानते हैं कि 2 का प्रतिलोम $\frac{1}{2}$ और 3 का $\frac{1}{3}$ है।

अर्थात् जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 है तो प्रत्येक संख्या को दूसरी संख्या का प्रतिलोम कहते हैं।

अतः अगर $\frac{5}{8}$ को $\frac{3}{4}$ से भाग देना हो तो हम इसे इस रूप में लिख सकते हैं।



$(1/2) \div (1/3) = \frac{1}{6}$; तो $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

यानी $\frac{1}{2}$ को 3 के प्रतिलोम से गुणा करना है।

इससे हम $\frac{5}{8}\div\frac{3}{4}$ को देख सकते हैं,

हम $\frac{3}{4}$ का प्रतिलोम लेते हैं तो $\frac{4}{3}$ होता है और $\frac{5}{8}$ को $\frac{4}{3}$ से गुणा करते हैं।

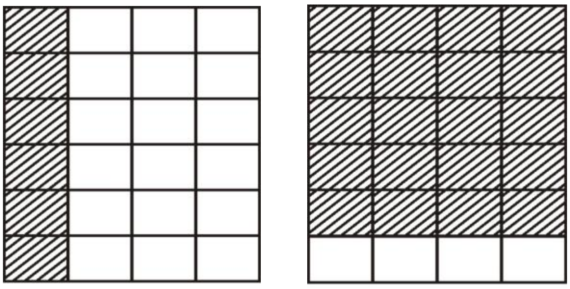
? $\frac{5}{8}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$

भाग अनुपात के रूप में :– जैसा हमने कहा भाग का एक अर्थ यह है कि कोई मात्रा अथवा संख्या दूसरे की कितने गुणा है। याने दोनों का अनुपात कितना है। ऐसे देखें तो (1/4) ÷ (5/6) को समझाने के लिए हम यह देख सकते हैं कि दोनों में रंगे हिस्सों का अनुपात $\frac{6}{20}$ है।

यानी (1/4) ÷ (5/6) = 6/20

अगर हम चित्रात्मक पद्धति का उपयोग करें तो (1/4) ÷ (5/6)

$\frac{1}{4}=\frac{6}{24}$ और $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$



$\frac{6}{24}$ $\frac{20}{24}$

यह भी हमें यही दिखाता है कि भाजक (divison) का विलोम लेकर उसे भाज्य (quotient) से गुणा कर दें। गुणनफल ही भागफल है। एक महत्वपूर्ण बात और है कि भिन्नात्मक संख्याओं के संदर्भ में भाग की संक्रिया करते समय शेष की जरूरत नहीं है। शेष की बात हम प्राकृत संख्याओं में ही करते है। क्योंकि वहाँ बची हुई संख्या में भाग देने पर प्राकृत संख्या नहीं मिलती।

बच्चों को भिन्नात्मक संख्याओं का भाग सिखाते समय भिन्नात्मक संख्याओं व भाग के बारे में स्वयं की समझ को साफ करना आवश्यक है। तभी हम बच्चों की दिक्कतों की समझ कर उन्हें आगे बढ़ाने के लिए मौके दे पाएंगे।

अभ्यास :

भिन्न की संदर्भ में भाग को समझने में मुख्य बातें क्या हैं?

भाज्य और भागफल ÷ प्राकृत संख्याओं में भागफल हमेशा भाज्य से छोटा होता है (जब तक कि भाजक 1 न हो)। यह हमारे रोजमर्रा के अनुभव से भी मेल खाता है। भिन्नात्मक संख्या के संदर्भ में ऐसा नहीं होता। जैसे गुणा करते समय भिन्नात्मक संख्याओं का गुणनफल दोनों ही गुणकों से छोटा हो सकता है इसका ठीक उलटा भाग में होता है। बच्चों के साथ इस पर चर्चा करने से

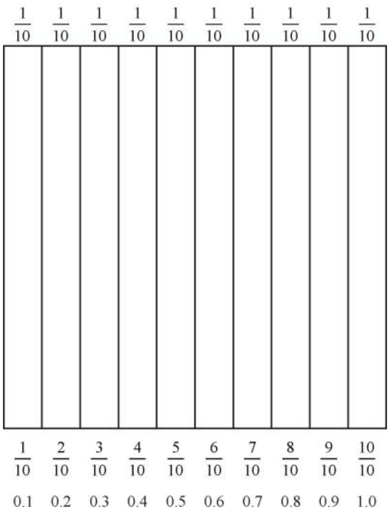
उन्हें भिन्नात्मक संख्याओं को समझने में मदद मिलेगी। उन्हें यह भी अंदाज होगा कि सामान्य अवलोकनों से बने हुए पैटर्न हरेक परिस्थिति में ठीक नहीं बैठते।

भागफल दोनों से बड़ा हो सकता है इसके लिए सरलतम उदाहरण इस तरह के सवाल हैं, 5 में कितने आधे हैं अथवा तिहाई हैं आदि, ऐसे और भी कथन स्वयं सोचें और बच्चों को भी सोचने को कहे।

4.18 दशमलव संख्या सिखाना

बोर्ड पर एक पन्ना बनाएँ और उसे दस भागों में बाँट दे।

यह एक पन्ने का दसवाँ हिस्सा है। (बच्चे भिन्नों के बारे में बातचीत के समय ठोस वस्तु से ऐसी गतिविधियां कर चुके हैं, स्मरण कराएँ) अब इसके सौ हिस्से कीजिए। हिस्से बराबर हों।



अब बच्चों से पूछे एक घर (खाना) एक पन्ने का कितना हिस्सा है।

बच्चे : $\frac{1}{100}$ (एक सौवाँ)

शिक्षक : दो खानों को दिखाते हुए– एक पन्ने का कितना हिस्सा है।

बच्चे : $\frac{2}{100}$ (दो सौवें)

शिक्षक : एक पन्ने के कितने सौवें भाग मिलकर एक दसवाँ भाग बनता है।

बच्चे : 10 सौवाँ भाग

शिक्षक : दो दसवें भाग कितने सौवें भाग से बनेंगे।

बच्चें : 20 सौवें भाग से

शिक्षक : एक दसवें भाग को काला रंगते हैं तथा 5 सौवें भाग को लाल से तथा 1 दसवें और 5 सौवें के रूप में पहचान कराते हैं।

0.15

दसवें सौवें

आगे बच्चों से अलग–अलग भाग रंगने को कहें तथा उससे संबन्धित संख्या लिखने को कहें। खूब अभ्यास कराने के बाद कोई संख्या देकर उसके अनुसार दसवें एवं सौवें भाग रंगने को कहें। इस गतिविधि को करते हुए परिणाम देखिए।

4.19 दशमलव संख्याओं पर संक्रियाएँ

4.19.1 जोड़ और घटाव

रोज की जिंदगी में कई बार ऐसी स्थितियां हमारे सामने आती हैं जहॉ हमें दशमलव संख्याओं की जोड़–बाकी अथवा गुणा–भाग की आवश्यकता होती है। आप ऐसी कुछ स्थितियों के उदाहरण बताइये।

दशमलव संख्याओं में जोड़–बाकी उसी तरह होती है जैसे कि पूर्ण संख्याओं में लेकिन जैसे की हमने अभी यह चर्चा की है कि दशमलव के सन्दर्भ में बच्चों को दसवे हिस्से, सोवे हिस्से, हजारवे हिस्से..... इत्यादि अवधारणाओं की समझ के साथ पूर्ण संख्याओं में जोड़ की उनकी समझ को विस्तार देना होता है।

बच्चे जो इसका जवाब दे सकते है कि क्यों जोड़ते वक्त इकाइयों को, इकाई के साथ व् दहाई को दहाई के साथ रखा जाता है उन्हें यह समझने में ज्यादा कठिनाई नहीं होगी कि दसवे हिस्से को दसवे हिस्से व् सोवे हिस्से को सोवे हिस्से के साथ रखना होगा। अतः यह बहुत आवश्यक है कि बच्चे दशांश, शतांश की अवधारना को अच्छी तरह समझ ले।

आप कुछ इस तरह की गतिविधियां कर सकते है

दी गयी संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखो

123, 525, 1.25, 25.5

जब बच्चें लिख लें तो उनसे यह बात की जा सकती है के इनमे कितने दसवे हिस्से है, क्या सभी संख्याओ में हैं किन में नहीं है? इत्यादि।

इसके बाद बच्चों को जोड़ और बाकी के सवाल भी करने को दिए जा सकते है।

अब आप बच्चों के लिए दशमलव कि जोड़ व् बाकी प्रत्यीक के लिए दो–दो सवाल बनाइये।

कक्षा चार और पांच की गणित की पुस्तक देखिये और बताइये की उनमे दशमलव की जोड़–बाकी की अवधारणा से कैसे परिचय करवाया गया है?

बच्चों के साथ दशमलव् की जोड़ और बाकी की अवधारणा पर काम करते हुए आपके क्या अनुभव रहें हैं यह बताइये। जैसे क्या है जो वे पहले से जानते है? किस किस तरह कि गलतियाँ करते हैं व् आपके अनुसार उनकी क्या वजहें होती होंगी?

निम्न संक्रियाओं को देखिए :

(i) 0.05+0.101+0.3 (ii) 3.4–1.53

(a) 0.005	(b) 0.05	(c) 1.53	(d) 3.4
0.101	0.101	–3.4	–1.53
+0.300	+0.003	11.9	1.93
0.406	0.154		

ऊपर दिए गए सवालों को देखिये और बताइये कि बच्चों को क्या आता है? उन्होंने क्या गलतियाँ कि है व् आपके अनुसार उन्होंने ऐसी गलतियाँ क्यों की होंगी? ये गलतियां हमें बताती हैं कि बच्चे किस तरह सोचते व सीखते हैं। गलतियाँ बच्चों के सीखने का स्वाभाविक अंग है। हम बच्चों की गलतियों का विश्लेषण करें तो पाते हैं कि जोड़ने व घटाने की क्रिया से संबन्धित न होकर दशमलव पद्धति में बिन्दु के दोनों ओर अंकों के क्रम की समझ से है। हमारे विचार से इसका सर्वोत्तम समाधान यह होगा कि दशमलव में स्थानीय मान की बेहतर समझ विकसित की जाय। पिछले भाग में वर्णित गतिविधि की मदद ली जा सकती है जिससे वे दशमलव बिन्दु के बाद के हर अंक का स्थानीय मान समझने लगे और गणितीय क्रियाएँ बेहतर ढंग से कर पाये।

4.19.2 गुणा

अवधारणात्मक समझ बात करें तो दशमलव के गुणा के सन्दर्भ में सबसे पहली बात यह समझनी होती है कि किन्ही दो दशमलव संख्यओं के गुणन का मतलब क्या है? उदाहरण के लिए .5 × .5 को कैसे समझे? पहले तो यह समझना होगा कि .5 अर्थात $\frac{5}{10}$ और इसे हम ऐसे भी दर्शा सकते हैं $\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}$ और भिन्न संख्याओं की हमारी समझ कहती है कि इसका तात्पर्य है $\frac{5}{10}$ का $\frac{5}{10}$ = $\frac{25}{100}$ या .25 या $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ या .25

अब आप कुछ सवाल कीजिये। .3 × .3 = ?, .2 × .2 =?, .5 × 10 =?

अब इन सब पर ज़रा ध्यान दीजिए :

निम्न संक्रियाओं को देखिएः

(i) $0.1\times5=\frac{1}{10}\times5=\frac{5}{10}=0.5$

(ii) $0.01\times5=\frac{1}{100}\times5=\frac{5}{100}=0.05$

(iii) $0.001\times5=\frac{1}{1000}\times5=\frac{5}{1000}=0.005$

बच्चो से गुणन के चरणों के बारें में भी बात की जा सकती है लेकिन यह तभी उपयोगी होगी जब वे गुणा कि अवधारणा अच्छे से समझ गए हो। जैसे कि ऊपर बताया गया है।

क्या 'बराबर' चिह्नों के दोनों तरफ की संख्याओं में दशमलव बिन्दु के दाई ओर के अंकों की संख्या बराबर है। प्रश्न (i) में दाईं और बाईं ओर दशमलव के बाद एक अंक है। इसी तरह की दूसरे प्रश्न में दाहिनी ओर दो अंक हैं और बाईं ओर एक अंक है। मान लीजिए हम 0.7 और 0.8 का गुणा करना चाहते हैं तो पहले हम 7 और 8 पूर्णांकों का गुणा कर देंगे। 56 आ जायेगा। अब दोनों गुणांकों में दशमलव के दाहिनी ओर के अंक गिन लेंगे और उतने अंकों के बाद परिणाम में दाहिनी तरफ से दशमलव बिन्दु देंगे। चूँकि यहाँ दोनों गुणांकों में मिला कर दशमलव के बाद 2 अंक हैं इस लिए गुणनफल 0.56 होगा। और इसी तरह तीसरे प्रष्न में दषमलव के दाहिनी ओर तीन अंक और बांयी ओर एक अंक है। इस में क्या होगा सोचें?

4.19.3 भाग

निम्न उदाहरण को देखें, जिसे छठी कक्षा के एक बच्चे ने हल किया है।

```
54.16 ,  8

      .677
   --------
 8 ) 54.16
     48
     -----
      61
      56
     -----
       56
       56
    -------
        0
```

स्पष्ट है बच्चे ने नियम को नहीं समझ पाया है। हमारे लिए बच्चों को यह समझाना बहुत ज़रूरी है कि वे भाग में दशमलव बिन्दु कब लगाए। हम इस बात पर जोर देते हैं कि– ''बिन्दु पूर्णांक को भिन्न वाले हिस्से से अलग करने के लिए है।'' उपरोक्त प्रश्न में हम पहले 54 को 8 से भाग देते हैं। तब शेषपफल 6 मिलता है। जो भाजक से कम है, अतः भागपफल 1 से कम मिलेगा अर्थात भागपफल में कोई पूर्णांक नहीं होगा। पफलतः भिन्न वाला हिस्सा शुरू होगा यानी भागपफल में दशमलव बिन्दु से शुरू करेंगे। इस प्रकार भाग देने में जब भी यह अवस्था आये कि शेषपफल भाजक से कम हो तो भागपफल में बिन्दु लगाते हैं।

4.20 कुछ गतिविधियाँ :

अब आप कुछ कार्ड बना लें, जिसके एक तरफ +, –, ×, ÷ आधरित प्रश्न लिखे हों और दूसरी तरफ उत्तर हो। एक कार्ड के सवाल का उत्तर अगले सवाल वाले कार्ड के पीछे लिखा हो। आखिरी कार्ड के सवाल का उत्तर सेट के पहले कार्ड के पीछे होगा। ध्यान दें कि उत्तरों में कोई उत्तर दोबारा न आयें। इस के लिए पहले आप प्रश्न और उत्तर को एक पन्ने पर लिख लें, पिफर कार्ड पर लिखें।

0.1×0.1	0.1×5	¬ कार्ड का अगला हिस्सा (प्रश्न)
0.5	0.01	¬ कार्ड का पिछला हिस्सा (उत्तर)

इन 31 कार्डों को अच्छी तरह से मिलाकर चार बच्चों मे बराबर–बराबर बाँट दें तथा बीच में एक कार्ड और 31 गोलियाँ/ पत्थर/ पत्ते/ अन्य कोई एक तरह की छोटी चीजें रख दें। अब बीच में रखे कार्ड के प्रश्न वाले भाग को निकाले (माना 0.1× 0.1है) चारों बच्चे अपने कार्डों में इसका उत्तर वाला कार्ड खोजें जिसे मिलेगा वह प्रश्नवाले कार्ड के बगल में रख देंगे। यदि सब इस उत्तर से राज़ी हों तो कार्ड रखने वाला एक गोली ले लेगा। पिफर उसी कार्ड को उलटने पर अगला प्रश्न आ जायेगा और खेल बढ़ता जायेगा। जिसके पास ज्यादा गोलियाँ जमा होंगी वह विजयी होगा।

4.21 सारांश

हमने समझा कि भिन्नात्मक संख्या को दो पूर्ण संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है–$\frac{p}{q}$, जहाँ पर p व q पूर्ण संख्याएं हैं तथा q का मान 0 के बराबर नहीं है। भिन्नात्मक संख्याएं क्या है, उसके प्रकारों और उसकी समझ पर चर्चा की तथा इससे हमें यह पता चला कि प्राकृत संख्याओं से बडा समुच्चय भिन्नात्मक संख्याओं का है। हमने प्राकृत संख्याओं तथा भिन्नात्मक संख्याओं के बीच तुलना कर उनकी संक्रियाओं से संबंधित समानताओं और विभिन्नताओं को जाना। सभी प्रकार की संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कर यह देखा कि कौनसी संख्या बडी होती है और कौनसी छोटी। भिन्नात्मक संख्याओं के उपयोग तथा उसके विभिन्न अर्थो – भाग के रुप में, गणक के रुप में, पूर्ण के हिस्सें के रुप में, अनुपात के रुप में तथा मापक के रुप में, को जाना। हमने जाना कि जब बच्चे 'आधा', 'तिहाई', 'चौथाई', जैसे भिन्नों के नाम तथा पूर्ण से उनके संबंध में भली भांति परिचित हो जाएँ, तभी उन्हें भिन्नों के संकेतों से परिचित कराना चाहिए। भिन्नों की तुल्यता की समझ पर बच्चों के साथ कैसे काम किया जाए, इससे संबन्धित गतिविधियों एवं तरीकों की चर्चा की गई । भिन्न संख्याओं की चार बुनियादी संक्रियाओं के बारे में बच्चों की समझ विकसित की जाने वाली गतिविधियों पर चर्चा की गई। दशमलव संख्याओं की समझ में बच्चों की बुनियादी समस्याओं पर चर्चा करते हुए उन तरीकों पर विचार किया गया जिसके जरिए बच्चे संख्याओं की दशमलव पद्धति को बेहतर समझ पाए। दशमलव संख्याओं की संक्रियाओं से परिचित कराने के तरीकों पर गौर किया गया। अन्त में पूरी इकाई में इस बात पर जोर दिया गया कि

(i) ठोस वस्तुओं द्वारा विभिन्न गतिविधियाँ कराई जाएँ।

(ii) बच्चों के अनुभव एवं प्रतिदिन के कार्यों पर आधरित 'संख्या' शिक्षण हो।

(iii) बच्चों द्वारा किए गए कार्यों को व्यक्त करने के पूर अवसर प्रदान तो किए ही जाएँ साथ ही उनके कार्यों का पूरा सम्मान किया जाए।

(iv) नियमों को रटाने की बजाय रचनावादी उपागम का सहारा लिया जाए तथा अवधारणाओं एवं तर्कों की समझ हेतु उनकी मदद की जाए।

4.22 स्वमूल्यांकन

1. समूह के भिन्न से आपका क्या आशय है? किसी एक वस्तु और वस्तुओं के समूह, दोनों को एकल इकाई के रूप में स्पष्ट करते हुए भिन्न की अवधारणा को कैसे स्पष्ट करेंगे?

2. संख्या रेखा की सहायता से आप भिन्नों में तुलना किस प्रकार करेंगे? संख्या रेखा की अवधारणा को स्पष्ट कीजिये।

3. भिन्नात्मक संख्याओं के विभिन्न अर्थो को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट कीजिये।

4. दशमलव भिन्न की संक्रियाएं करते समय बच्चों द्वारा की जाने वाली त्रुटियों/कठिनाइयों की एक सूची तैयार कीजिए।

5. दशमलव भिन्न की अवधारणा विकसित करने हेतु एक प्रभावी विधि जिसका उपयोग कक्षा विनिमयन के दौरान करना चाहेंगे, की व्याख्या कीजिए।

6. कारण के साथ बताएँ–

   (i) $\frac{19}{12}$ का मिश्र भिन्न क्या होगा?

   (ii) $\frac{17}{9}$ को मिश्र भिन्न में बदलें।

7. आरेख की सहायता से स्पष्ट करें और खाली जगहों में $>$ या $<$ भरिए :

   (i) $\frac{2}{3} \ \square \ \frac{1}{3}$

   (ii) $\frac{2}{7} \ \square \ \frac{3}{7}$

   (iii) $\frac{1}{5} \ \square \ \frac{1}{7}$

8. निम्न समान हर वाली भिन्नों को आरेखों की सहायता से हल करें–

   (i) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{9}+\frac{4}{9}$

   (iii) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ (iv) $\frac{10}{13}-\frac{3}{13}$

9. निम्न असमान हर वाली भिन्नों को आरेखों की सहायता से हल करें–

   (i) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

(iii) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}-\frac{2}{5}$

10. आरेख की सहायता से स्पष्ट करते हुए –

(i) $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{7}$ का गुणनफल ज्ञात करें।

(ii) $1\frac{4}{5}$ और $9\frac{1}{2}$ का गुणनफल ज्ञात करें।

11. आरेख की सहायता से स्पष्ट करते हुए –

(i) $\frac{4}{5}$ को 4 से भाग दें।

(ii) $\frac{3}{8}$ को $\frac{3}{5}$ से भाग करें।

12. सारा के पास 348 कलम है और उसमें से वह $\frac{3}{4}$ कलम कमल को दे देती है। तो उसने कितने कलम कमल को दे दिये?

13. 25 सेमी 1 मीटर का कितना भाग है?

4.23 अध्ययन केन्द्र पर की जाने वाली गतिविधियाँ

आइए, हम अपने केन्द्र पर अपने साथियों के साथ चर्चा कर नीचे दिए गए कार्यों को संपादित करें

1. अपने साथियों की मदद से भिन्न सिखाने हेतु शिक्षण अधिगम सामग्री निर्माण पर चर्चा कीजिए तथा अपने–अपने स्तर से बनाई गयी सामग्रियों को साथियों के बीच में कीजिए।
2. अगर आपके अध्ययन केन्द्र पर कम्प्यूटर की व्यवस्था हो तो अपने काउंसलर तथा साथियों की मदद से ऐसे आरेख तैयार कीजिए जिनकी मदद से आपको भिन्न तथा उस पर आधरित संक्रियाएँ सिखाने में मदद मिल सके।
3. जोड़–घटाव की समझ बेहतर बनाने के लिए कोई खेल/गतिविधि तैयार कीजिए। अपने साथियों के साथ गतिविधि संपादित कीजिए तथा अनुभुत अनुभवों को सिखिए।
4. अपने वर्ग–शिक्षण के दौरान बच्चों से प्राप्त भिन्न एवं दशमलव भिन्न पर आधरित संकलित संक्रियाओं/ कठिनाइयों के संबन्ध को साथियों के बीच चर्चा कीजिए। इनके कारणों और इन्हें दूर करने के उपायों को ढूँढ़िए।
5. अपने अध्ययन केन्द्र पर उपलब्ध (यदि हो) गिनती संख्या भिन्न एवं अन्य गणितीय अवधरणाओं पर आधरित वीडियो देखिए और अपने साथियों से विमर्श कर तकनीकों की विशेषताओं का लिखिए।

इकाई–5
ज्यामितिय आकृतियाँ एवं पैटर्न

5.1 परिचय
5.2 सीखने के उद्देश्य
5.3 पूर्व अनुभव
5.4 ज्यामितीय अवधारणाएँ
 5.4.1 समतल सतह
 5.4.2 बन्द आकृतियां
5.5 बिन्दु, रेखा, किरण, रेखाखण्ड एवं कोण
 5.5.1 बिन्दु एवं किरण
5.6 सम आकृतियाँ
5.7 द्विवीमीय आकृतियों एवं त्रिविमीय वस्तुओं को पहचानना तथा उनके वि"ाेष गुणों की समझ
 5.7.1 त्रिभुज
5.8 सममित आकृतियाँ
5.9 पैटर्न की अवधारणा
5.10 सारांश
5.11 स्वमूल्यांकन

5.1 परिचय

हर बच्चे के पास स्थान सम्बंधी कुछ सहज विचार विकसित करने लगते हैं, जैसे दूर, पास, लम्बा, छोटा, दूरी आदि। इन्हीं सहज विचारों पर हम ज्यामिती के पाठों की बुनियाद रखी जानी चाहिये लेकिन ऐसा होता नहीं हैं। आज भी हममें से अधिकांश लोग बिन्दु, रेखा, अर्ध रेखा, रेखाखण्ड, वर्ग, जैसी ज्यामितीय अवधारणाओं को सिखाने के लिए औपचारिक परिभाषाओं या मौखिक वर्णन का सहारा लेते हैं। नतीजा यह होता है कि बच्चे सिखाई गई अवधारणाओं का मानसिक चित्र निर्मित नहीं कर पाते। यदि आप अपने विद्यालय या अपने आसपास के विद्यालय के कक्षा 3, 4, 5 के बच्चों के साथ इस संदर्भ में बातचीत करें या उनकी गणित की कक्षा का अवलोकन करें तो आपको शायद ऐसे कई बच्चे मिल जाए जो आपको वर्ग, आयत अथवा अन्य किसी आकृति की की परिभाषा तो बता देंगे लेकिन यदि आप उनसे बहुत–सी आकृतियों में से किसी आकृति विशेष को पहचानने को कहें तो शायद वे ना बता पाएं। यदि आप उनसे पूछे कि वर्ग, आयत है या नहीं अथवा वर्ग किस किस्म का आयत है तो वे इसका जवाब ना दे पाए। क्या इसका मतलब है कि बच्चे ऐसी आकृति की कल्पना करने में सक्षम नहीं है अथवा उन्हें इस तरह की आकृतियों को उसे 'देखने' का मौका कभी नहीं मिला या वे अपने दिमाग में इस आकृति की छवि नहीं बना पाते? किसी बच्ची को कक्षा में दो बेलनाकृतियों के आकार की तुलना करने में कठिनाई क्यों होती है जबकि घर पर वह बड़ी आसानी से 1 किलोग्राम शक्कर रखने के लिए बड़ा बर्तन ढूंढ निकालती है? यह इकाई इस तरह के प्रश्नों व इन प्रश्नों के सन्दर्भ में बच्चों के साथ काम कैसे किया जाय यह समझने में हमारी मदद करेगी।

5.2 सीखने के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरांत आप :

- ज्यामितीय अवधारणाओं में बच्चों की दक्षता हासिल कराने के लिए उनके रोजमर्रा के अनुभवों का इस्तेमाल कर पाएंगे।
- ज्यामितीय अवधारणाएं समझाने के लिए विभिन्न खेल व गतिविधि का निर्माण कर पाएंगे।
- अपनी विधियों की उपयोगिता का आकलन कर पाएंगे।
- विभिन्न ज्यामितीय अवयवों–बिन्दु, रेखा, किरण, रेखाखण्ड, कोण की अवधारणा को समझ पायेंगे।
- विभिन्न आकृतियों के क्या ज्यामितीय निहितार्थ हैं, बता पायेंगे।
- द्विविमीय आकृतियों एवं त्रीविमीय वस्तुओं की पहचान करने तथा उनके वि"ोष गुणों को जानने में सक्षम होंगे।
- पैटर्न की अवधारणा को समझेंगे तथा उनका आव"यकतानुसार प्रयोग करेंगे।

5.3 पूर्व अनुभव

ज्यामितीय अवधारणाएं सीधे–सीधे दैनिक जीवन पर आधारित होती हैं। अपने आस–पास के वस्तुओं के अवलोकन के आधार पर ही हम उनके बारे में अपनी धारणा बनाते हैं। पारम्परिक कक्षा पद्धति से पढ़ाए जाने पर छोटे बच्चे ज्यामिति की मूलभूत अवधारणाएं आम तौर पर नहीं समझ पाते हैं। इसके कई कारण हो सकते हैं। जैसे कि इन अवधारणाओं के लिए जरूरी पूर्व जानकारी बच्चों के पास नहीं होती। हो सकता है कि उन्हें जाने–पहचाने प्रयोगों के जरिए नई अवधारणाओं को समझने का मौका ही नहीं मिला हो। हो सकता है कि ि"ाक्षण मानकर चलते हों कि ये अवधारणाएं बहुत ही आसान हैं तथा समझाने की जरूरत ही नहीं है क्योंकि बच्चों के दिमाग में इनके बारे में सहज विचार तो हैं ही।
गणितीय अवधारणाओं को स्पष्ट करने के लिए कई बार अपने इन मूर्त अनुभव का हमें अमूर्तिकरण करना आव"यक हो जाता है। विभिन्न उदाहरणों से इस अमूर्तिकरण की प्रक्रिया को बच्चों के साथ स्पष्ट करना भी हमारे लिए आव"यक हो जाता है। ऐसा नहीं करने पर इन अवधारणाओं को समझना या समझाना हमारे लिए कठिन हो जाता है। आइए, यहां ज्यामिति से जुड़ी कुछ अवधारणाओं को एक–एक करके समझने की को"ि"ा करें।

5.4 ज्यामितीय अवधारणाएँ

5.4.1 समतल सतह

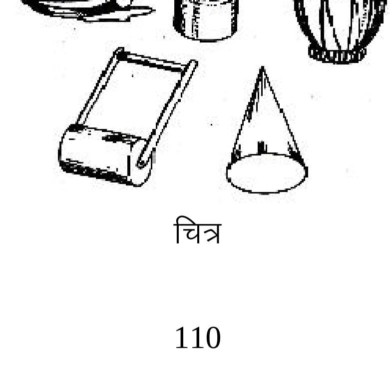
कभी–कभी ऐसा भी होता है कि कोई अवधारणा बच्चों के लिए बहुत अमूर्त होती है। समतल व असमतल सतह की अवधारणा ऐसी ही एक अवधारणा है। कक्षा में इस अवधारणा को कैसे पढ़ाया जाता है? ि"ाक्षकों के एक समूह से चर्चा की गयी। अधिकतर शिक्षक काफी अनुभवी थे। ि"ाक्षकों को दो टोलियों में बांट दिया गया और उनसे समतल व असमतल सतहों की अवधारणा पढ़ाने की विधियों पर विचार–विमर्श करने को कहा गया। एक घंटे बाद वे फिर से इकट्ठे हुए, अपने निष्कर्षों की प्रस्तुतीकरण करने को।
पहली टोली : इस टोली के अनुसार, छोटे बच्चे सोचते हैं कि हर चिकनी सतह सपाट सतह होती है। उनके लिए तो अण्डे की सतह, गेंद की सतह या किसी बेलनाकार पात्र की सतह, सब सपाट सतहें हैं। कई बच्चों के लिए तो सपाट और वक्र सतह का मतलब चिकनी व खुरदरी सतह से होता है। टोली

का मत था कि इस समस्या से निपटने के लिए यह किया जा सकता है कि बच्चों की आंखों पर पट्टी बांधकर उन्हें हाथों से कुछ चिकनी व कुछ खुरदरी चीज़ें महसूस करने को दी जाए ताकि वे यह समझ सकें कि सपाट व वक्र (गोलाई में) सतह की अवधारणा इनसे अलग है। उन्हें एक अण्डे और एक संतरे की सतह को छूकर अन्तर महसूस करने दें। उनसे इस बात पर भी चर्चा की जा सकती है कि क्यों लकड़ी का बेलनाकार टुकड़ा (गिट्टा) कांच पर तो दूर तक लुढ़कता है मगर सीमेंट के फर्श पर कम दूर लुढ़कता है।

सपाट व वक्र सतहों के बीच भेद समझाने के लिए बच्चों को उनकी स्लेट, फर्श, ज्योमेट्री बॉक्स या टिफिन बॉक्स का निरीक्षण करने को कहा सकता है। इसके बाद शिक्षक उन्हें बता सकते हैं कि ये सभी सपाट सतहें है और इन पर कोई मोड़ या घुमाव नहीं है और न ही इनमें कोई उभार या गहराई है। इन सतहों को सपाट सतह कहा जाता है। फिर उन्हें गेंद, अण्डे या किसी बेलनाकार पात्र की सतह में यह दिखाया जा सकता है कि ये मुड़ी हुई या वक्रता (गोलाई) लिए हुए हैं। अतः ये वक्र सतहें हैं।

प्रश्न : क्या आपने कभी यह जांचने की कोशिश की है कि कक्षा 4 के बच्चे समतल तथा वक्र सतहों के बीच भेद कर पाते हैं या नहीं? इस गतिविधि को 9 या 10 वर्षीय बच्चे के साथ आजमाकर इसकी सार्थकता की जांच कीजिए।

दूसरी टोली : दूसरे दल का सुझाव था कि शिक्षक बच्चों से माचिस, कंचे, पासे, पोस्टकार्ड, ग्लोब, गेंद, फुटबॉल जैसी कई चीज़ें लाने को कह सकते हैं। शिक्षक कक्षा में आसानी से उपलब्ध कुछ चीज़ें भी जुटा सकते हैं, जैसे पैन, रबर, पेंसिल, किताब, पेंसिल बॉक्स वगैरह। बेहतर यह होगा कि छोटी–बड़ी चिकनी–खुरदरी, सपाट–वक्र हर तरह की चीज़ें बच्चों के सामने हों। अब शिक्षक बच्चों के सामने इन चीज़ों को दो समूहों में बांटना शुरू करें। जैसे शिक्षक पोस्ट कार्ड हाथ में लेकर जाहिर रूप से उसकी सतह को महसूस करे, जबकि बच्चे उन्हें ऐसा करते देख सकें। शिक्षक थोड़ी देर सोचने का बहाना करके पोस्टकार्ड को दाईं ओर रख दें। इस तरह से वे एकाध समतल चीज़ें और उठाए और उन्हें दाईं ओर रख दें। फिर वे गेंद को उठाकर उसकी सतह को दोनों हाथों से महसूस करें ताकि बच्चों को यह नज़र आ जाए कि उसकी सतह गोल है और फिर उसे बाईं ओर रख दें। इसके बाद शिक्षक बच्चों से कहें कि वे चीज़ों को उठाएं और उन्हें सपाट व वक्र (या गोलीय) चीज़ों के रूप में अलग–अलग करें। अब वे बच्चों से यह बताने को कह सकते हैं कि उन्होंने किसी चीज को किसी खास समूह में क्यों रखा है। समूहीकरण का एकमात्र आधार सपाट और वक्र सतह है। इस तरह की चर्चा से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि सपाट सतह क्या होती है तथा गोलाई वाली सतह क्या होती है। बच्चों को ऐसी चीज़ों का निरीक्षण करने को कहा जा सकता है जिनमें समतल व गोलाईदार दोनों तरह की सतह होती है। ढोलक, तबला, तेल का डिब्बा आदि चीज़ों में सपाट व वक्र दोनों तरह की सतहें होती हैं। (नीचे दिए गए चित्र को देखें)।

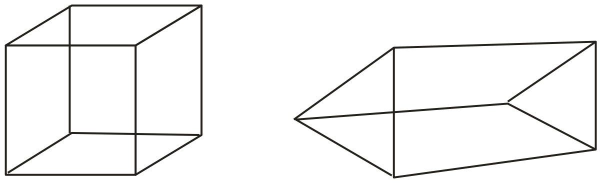


चित्र

प्रश्न : क) समतल सतह की अवधारणा को सीखने के लिए एक और ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसे 50 बच्चों की एक कक्षा में किया जा सके।

ग) एक कमरे के फर्श में जगह–जगह पर कुछ गढ्ढे हैं? क्या इसे हम सपाट सतह मानेंगे? कारण सहित बताइये।

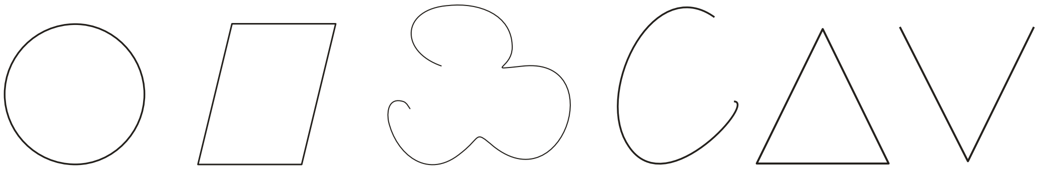
घ) इस चित्र में कितनी सपाट सतहें है?



'सम आकृति' और असम आकृति एक और ऐसा विषय है जिसके बारे में अधिकांश बच्चों तथा कुछ शिक्षकों में भी गलतफहमी होती है। आइए, इस अवधारणा को स्पष्ट करने के कुछ तरीकों पर विचार करें।

5.4.2 बन्द आकृतियां

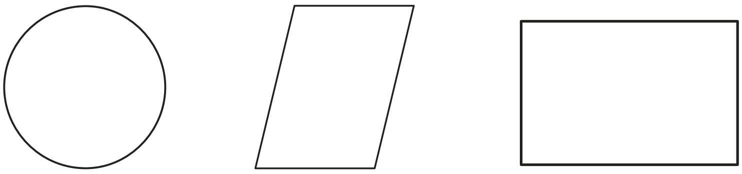
कक्षा तीन की एक शिक्षिका से यह पूछने पर कि वे बच्चों को बन्द व खुली आकृतियों से कैसे परिचय करवाती है? उन्होंने बताया कि वे बच्चों की चित्र बनाने की क्षमता का यहां भरपूर उपयोग करती है। उनका कहना था कि पहले मैं बच्चों से चित्र बनाने को कहती हूं और फिर उन्हीं के कुछ चयनित चित्रों को बोर्ड पर बनाकर उनका बंद व खुली आकृतियों से परिचय करवाती हूं। जैसे–



चित्र–2

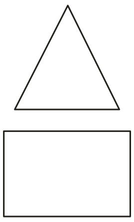
उनसे पूछती हूँ कि कौनसी आकृति खुली है व कौनसी बन्द? उनसे बातचीत करके यह जानने का भी प्रयास करती हूँ कि उनका किसी आकृति को बन्द व खुली कहने के क्या आधार है? अधिकांश बच्चे यह बता पाते हैं कि कौनसी आकृति बन्द है व खुली समस्या तब आती है जब उनका सामना कुछ इस तरह की आकृतियों से होता है।

तब मैं उनका परिचय बंद व खुली आकृतियों की परिभाषा से करवाती हूँ कि बंद आकृतियाँ वे होती हैं जिनका प्रारम्भिक बिन्दु व अंतिम बिन्दु एक ही होता है। जैसे–



मैं उनको ऐसे ही चित्र अपनी कॉपी पर बनाने को कहती हूँ ताकि वे स्वयं इस तथ्य को जाँच सके। साथ ही साथ खुली आकृतियों की भी परिभाषा से परिचय देती हूँ। खुली आकृतियाँ वे हैं तो प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त नहीं होती और कुछ खुली आकृतियां बनाकर स्वयं ही इस तथ्य ही जांच करने को भी कहती हूँ।

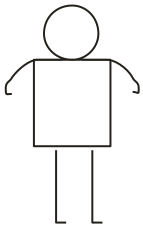
शिक्षिका का यह भी कहना था कि अलग–अलग तरह के अभ्यासों व गतिविधियों से बच्चों को बंद व खुली आकृति के बारे में स्पष्ट समझ बनाने में मदद मिलती है। अतः मैं उन्हीं के बनाये चित्रों में कहाँ खुली आकृतियां है व बंद आकृतियां है यह पहचानने को कहती हूँ तथा यह भी कहती हूँ कि वे गिनकर बताए कितनी है।



(1)

बन्द आकृति

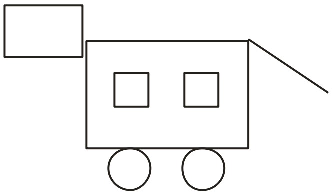
खुली ....



(2)

बन्द आकृति

खुली ....



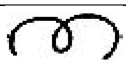
(3)

बन्द आकृति

खुली ....

यह काफी नहीं है कि बंद आकृति को परिभाषित कर दिया जाए और फिर बच्चे की समझ का मूल्यांकन कर लिया जाए। उसे इस अवधारणा का उपयोग अलग–अलग संदर्भ में करना भी आना चाहिए। इसके लिए कठिन स्थितियों में अभ्यास जरूरी है। इसके लिए बढ़िया तरीका यह हो सकता है कि दिलचस्प और चुनौतीपूर्ण पहेलियों का इस्तेमाल किया जाए।

प्रश्न : क्या आपको लगता है कि 'बन्द व खुली आकृति' की अवधारणा समझने हेतु यह ठीक तरीका होगा। एक शिक्षक के नाते आप अपने छात्रों को यह अवधारणा कैसे सिखाएंगे? क्या इस संबंध में कोई खेल या गतिविधि बेहतर साबित होगी? यदि हां, तो किसी गतिविधि का उदाहरण दीजिए।

कई बच्चे और व्यस्क भी यह निश्चित रूप से तय नहीं कर पाते कि  जैसी आकृति बन्द है या खुली। उनका मत होता है कि आकृति का एक हिस्सा बन्द है हालांकि आकृति बन्द नज़र नहीं आती। यही स्थिति आकृति के साथ भी होती है।

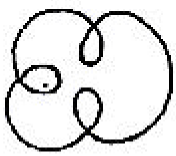
गतिविधि :

एक पेंसिल लिजिए। उसकी सतह से अपने नोटबुक पर एक बिन्दु अंकित कीजिए। जब उस बिन्दु पर पेंसिल की नोक रखते हुए पेंसिल को आगे बढ़ाते जाइए तथा जिस बिन्दु से चलना आरम्भ कियो थे पुनः उसी बिन्दु पर पहुंचिए लेकिन ध्यान रहे कि रेखा आपस में कटे नहीं। सोचिए। क्या आपके द्वारा बनाई गयी आकृति में बाहर से प्रथम बिन्दु तक जाने के लिए रास्ता है। यदि हां तो आपके द्वारा बनी

आकृति **खुली आकृति** है। यदि आपके द्वारा बनी आकृति में अंदर जाने के लिए कोई रास्ता नहीं है तो वह **बंद आकृति** है। आइए देखें कि कक्षा 4 की एक ि”ाक्षिका ने इसे कैसे समझाया।

शिक्षिका ने कागज़ पर एक बन्द आकृति बनाई। उन्होंने दिखाया कि इस आकृति के किसी भी बिन्दु से, किसी भी दिशा में पेंसिल चलाना शुरू करें तो हम आकृति के किसी भी हिस्से पर दोबारा चले बगैर वापिस शुरूआती बिन्दु पर पहुंच जाते हैं। **यदि किसी भी आकृति के किसी भी बिन्दु से किसी भी दिशा में चलते हुए यह सम्भव हो कि हम आकृति के किसी भी हिस्से पर एक से अधिक बार चले बगैर वापिस मूल बिन्दु पर पहुंच सकें, तो वह बन्द आकृति है।** यह समझाने के बाद उन्होंने यह आकृति बनाई। बच्चों ने देखा कि वे वापिस शुरूआती बिन्दु पर नहीं पहुंच सकते। यानी यह बन्द आकृति नहीं है।

फिर उन्होंने एक आकृति बनाई (चित्र)



इसकी रेखा एक–दूसरे को काटती थीं। अब उन्होंने बच्चों से पूछा? कि क्या यह एक बन्द आकृति है? उन्होंने बच्चों से एक पेंसिल की मदद से यह पता करने को कहा कि क्या वे पेंसिल को आकृति पर फेरते हुए शुरूआती बिन्दु पर पहुंच सकते हैं। बच्चों ने करके देखा कि यह सम्भव है। यानी यह एक बन्द आकृति है। इसी तरह उन्होंने 2–3 अन्य आकृतियां बनाकर बच्चों से कहा कि वे इनमें खुली/बन्द आकृतियां पहचानें। अन्ततः जब शिक्षिका संतुष्ट हो गई, तब उन्होंने बच्चों को घर पर करने के लिए कुछ और सवाल दिए।

प्रश्न : आप निम्नलिखित को दिखाने के लिए किस प्रकार की गतिविधियां सोच सकते हैं :

i) किसी खुली आकृति/बन्द आकृति के सीधे कोर भी हो सकते हैं, गैर सीधे भी या फिर दोनों भी।
ii) सीधे कोर वाली खुली आकृति के कितने भी कोर हो सकते हैं।
iii) सीधे कोर वाली आकृति तभी बन्द आकृति बन सकती है जब उसके कम से कम तीन कोर हों।
iv) किसी भी बन्द आकृति का एक अन्दर और एक बाहर होता है जिन्हें क्रमशः अन्तर्भाग व बहिर्भाग कहते हैं।

5.5 बिन्दु, रेखा, किरण, रेखाखण्ड एवं कोण

5.5.1 बिन्दु एवं किरण

आप एक बारीक नुकीली पेंसिल लिजिए तथ उसे अपने नोठबुक पर रखिए। इससे बनने वाली आकृति बिन्दु का विचार प्रस्तुत करता है। कई बार बिन्दु को परिभाषित करते हुए हम यह कह जाते हैं कि बिन्दु एक ऐसा वृत है जिसकी त्रिज्या शून्य है या बिन्दु एक ऐसी आकृति है, जिसमें लम्बाई चौड़ाई या मुटाई न हो। क्या कोई वैसी आकृति दिखना सम्भव है जिसमें लम्बाई, चौड़ाई और मुटाई न हो? ऐसा कहना सही नहीं है। हम बिन्दु को परिभाषित करने से बचना चाहिए क्योंकि इससे बिन्दु के बारे में हमारी अवधारणा अस्पष्ट ही रह जाती है।

आम तौर पर कक्षा में कुड ऐसी प्रक्रिया होती है : ि”ाक्षण ब्लैक बोर्ड पर स्केल की मदद से एक रेखाखण्ड खींच देते हैं, इसके दाहिने सिरे पर एक तीर का नि”ाान बना देते हैं और फिर बाएं सिरे को ए तथा दाएं सिरे को बी अंकित कर देते हैं। इसके बाद वे बच्चों को बताते है। कि इस चित्र को

'किरण' कहते हैं। आप ही सोचिए जिन बच्चों का किरण से परिचय इस तरीके से कराया जाता है क्या वे इस तरह के सवालों के जवाब दे पाएंगे?

- कोई किरण बाई से दाईं ओर ही क्यों खींची जाती है?
- तीर का नि”ाान क्यों लगाया जाता है?
- यदि बाईं तरफ तीर का नि”ाान लगा दें, तो क्या हो जाएगा?
- क्या हम किरण को खड़े रूप में नहीं देख सकते?
- कितनी लम्बाई बनाने के बाद तीर का नि”ाान लगाना चाहिए।
- किरण क्या होती है यह समझाने के लिए मेरे एक ि”ाक्षक मित्र ने यह चित्र बनावाया।

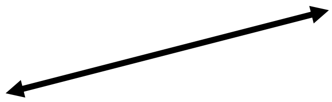
इससे समझाया कि जहां बिन्दु है वहां से चलकर चित्र में दिखाई दि”ाा में बढ़ते जाओ। शुरू में किसी भी दि”ाा को चुन सकते हो। लेकिन एकबार दि”ाा चुन लेने के बाद लगातार उसी दि”ाा में चलना है। सिर पर बना तीर इसी दि”ाा को बताता है और यह भी बताता है कि चलते जाना है। इसके बाद किरण की औपचारिक परिभाषा देकर नीचे दिए चित्र के अनुसार ि”ाक्षक ने किरण का ज्यामितीय चित्र बना दिया।

क ख

ऊपर दिखए गए किरण को हम 'कख' से व्यक्त करेंगे। किरण में एक आद्य बिन्दु होता है, जहां से किरण आरम्भ होकर किसी एक दि”ाा में बिना किसी अंत के आगे बढ़ती जाती है।

5.5.2 रेखा

एक ही आरम्भ बिन्दु से विपरित दि”ााओं में बढ़े व बिना रूके बढ़े तो निम्नलिखित चित्र के अनुसार दिखेगा।



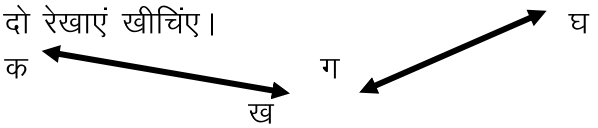
ऐसा करने पर हम पाते हैं कि प्राप्त नयी आकृति, **रेखा में न कोई प्रारम्भिक बिन्दु है और न ही कोई अंत बिन्दु।** ऐसा भी समझ सकते हैं कि एक रेखा अनन्त बिन्दुओं का समुच्चय भी होता है।

क ख

यहां हम रेखा को 'क ख' से प्रदर्”ात करते हैं। दोनो तरफ का तीर उसके दोनों दि”ाा में असीमित प्रसार को बताता है। हम दोनों तरफ एक–एक तीर का नि”ाान कयों लगाते हैं? इसकी शुरूआत कहां है? यह कहां खत्म होती है। अंतिम बिन्दु कहां है? यह कितनी लम्बी हो सकती है? बच्चों से इस तरह के कई सवाल पूछे जा सकते हैं।

किसी समतल में दो रेखाओं के बीच का सम्बंध

आइए। किसी तल में दो रेखाओं के बीच क्या सम्बंध हो सकता है, जानने का प्रयास करें। इसके लिए आप अपने नोटबुक पर दो रेखाएं खीचिंए।

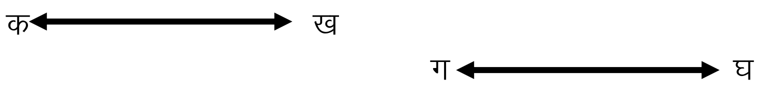


दोनों रेखाओं को आप दोनों दि”ााओं में बढ़ाइए। आप क्या पाते हैं? दोनों रेखाएं या तो एक–दूसरे को काटती हैं या फिर नहीं काटती हैं।

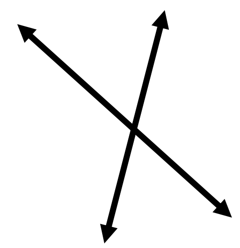
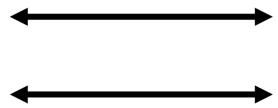
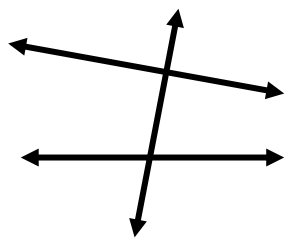
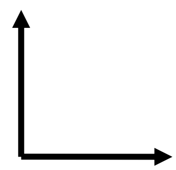
दो रेखाएं जब एक–दूसरे को काटती हैं तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएं कहलाती हैं। अगर वे एक–दूसरे को नहीं काटती हैं तो वे एक दूसरे के समांतर होती हैं यानी, सभी स्थानों पर समान अन्तर पर होती हैं जिसके कारण वे दोनों आपस में कभी नहीं मिलती हैं।

ऊपर के उदाहरण में जब हम 'ग घ' को ग बिन्दु की दि”ाा में बढाते हैं तो वह 'क ख' को काटती है।

अतः हम कह सकते हैं कि 'क ख' एवं 'ग घ' रेखाएं, प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं। वहीं नीचे के उदाहरण में हम देखते हैं कि 'क ख' एवं 'ग घ' रेखाएं, आगे–पीछे बढ़ाने पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित नहीं करते हैं। इस स्थिति में वे एक दूसरे से कभी नहीं मिल पाती हैं। इन्हें समान्तर रेखा कहते हैं।



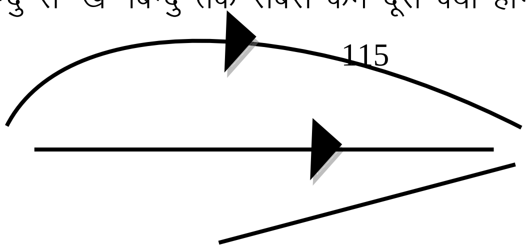
जब दो रेखाओं को एक तीसरी रेखा, दो अलग–अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है तो वह तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है। दो रेखाएं जब एक दूसरे पर लम्ब हों यानि उनके बीच का कोण 90^0 हो तो वे लम्बवत रेखाएं कहलाती हैं।

			
प्रतिच्छेदी रेखा	समान्तर रेखा	तिर्यक रेखा	लम्बवत् रेखा

5.5.3 रेखाखण्ड

एक चौकोर पन्ना लिजिए तथा इसे मोड़िए और खोलिए। पन्ने पर मोड़ने की वजह से बनने वाला नि”ाान आपको एक रेखाखण्ड का एहसास कराता है। पुस्तक का किनारा भी आपको एक रेखाखण्ड का एकसास करता है।

नीचे चित्र में 'क' बिन्दु से 'ख' बिन्दु तक सबसे कम दूरी क्या होगी।



आपने देखा कि दो बिन्दुओं के बीच की सीधी दूरी ही सबसे छोटी दूरी है और दो बिन्दु के बीच की यह दूरी रेखाखण्ड को प्रदर्”ित करती है। एक रेखाखण्ड में दो अंत बिन्दु होते हैं जिसे आप नीचे देख सकते हैं।

यहां रेखाखण्ड को हम 'क ख' से निरूपित करते हैं।

प्र”न : अपने आस–पास देखिए तथा रेखाखण्ड के कुछ उदाहरण ढूंढ कर नीचे लिखिए।

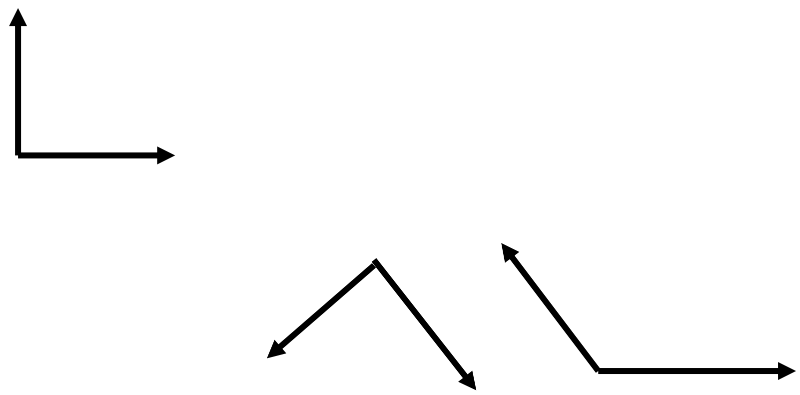
....

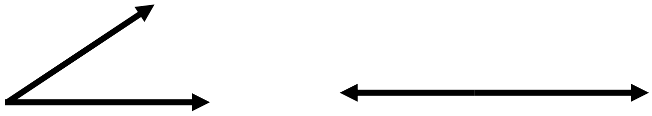
3.5.4 कोण

कक्षा 5 के एक ि”क्षक ने ब्लैक बोर्ड पर एक कोण बनाया और कहा कि यह कोण का चित्र है। तत्काल एक बच्चे ने सवाल किया, 'कोण कौन सा है, सर? सफेद वाला या काला वाला? काले पर सफेद चाक से बने इस चित्र ने बच्चे को चक्कर में डाल दिया था कि चाक से बना सफेद नि”ाान कोण है या इस सफेद नि”ाान के अन्दर वाला हिस्सा कोण है।

न सिर्फ बल्कि कई वयस्कों को भी इस प्र”न का जवाब देने में कठिनाई होती है कि कोण क्या होता है। वे कुड इस तरह के जवाब : दो लाईनों के बीच का अन्तर, जहां लाईने मिलती हैं वहां का अन्तर 'दो सरल रेखाओं के बीच का नाम' वगैरह देते हैं। किसी मानक पाठ्यपुस्तक में कोण की परिभाषा देखें, तो वहां वह इस तरह दी होगी : समान अंतिम बिन्दु वाली दो किरणें कोण बनाती हैं, या 'जब किसी रेखा को उसकी मूल स्थिति से घुमाया जाता है तो मूल रेखा के सापेक्ष कोण बनते हैं। ये परिभाषाएं न तो बच्चों को कोण का मतलब समझने में मदद करती है न ही दिमाग में कोण की किसी छवि बनाने में।

बच्चों से अपनी नोट बुक में दो किरणें को कहें। दोनों किरणों को इस तरह बनाने को कहें कि किरणों के वे सिरे एक–दूसरे को छुएं जिन पर की तीर नहीं है। बच्चों द्वारा बनाई गई आकृतियां ऐसी दिखेंगी।

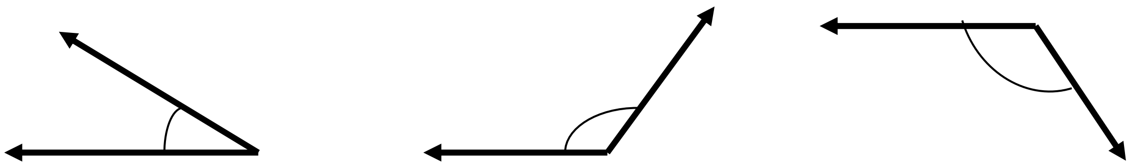




फिर बच्चों को बता सकते हैं कि दो किरणों की मदद से उन्होंने जो आकृतियां बनाई हैं, वही कोण हैं। कुछ इस तरह से सवाल बच्चों से किये जा सकते हैं :

- एक कोण बनाने के लिए कितनी किरणें लगी?
- तुमने किरणों को कैसे रखा है?
- किरणें एक–दूसरे को कहां छू रही हैं?
- अगर किरणों को एक–दूसरे के विपरित दि"ाा में रख दें तो क्या होगा?

यहां पर कोण की एक औपचारिक परिभाषा दी जा सकती है कि जब दो किरणों का एक साझा अंतिम बिन्दु होता है, तब वे कोण बनाती हैं। कोण में दोनों किरणों का आद्य बिन्दु या प्रारम्भिक बिन्दु उपयनिष्ठ होता है जिसे कोण का शीर्ष कहते हैं तथा दोनों किरणें कोण बनानेवाली भुजाएं कहलाती हैं। चित्र में बने तीन कोणों में शीर्ष क्रम"ाः ख, ब तथा फ है तथा कोणों के नाम क्रम"ाः क ख ग, अबस, तथा पकम हैं।



प्र"न : बताई गई ि"ाक्षण रणनीति के बारे में आपकी क्या राय है? क्या इस तरीके से बच्चों को वाकई अपना यह संदेह दूर करने में मदद मिलेगी कि कोण किरणों द्वारा बनाई गई आकृति का सफेद वाला हिस्सा है या काला वाला? अपने उत्तर को कारण सहित समझाइए।

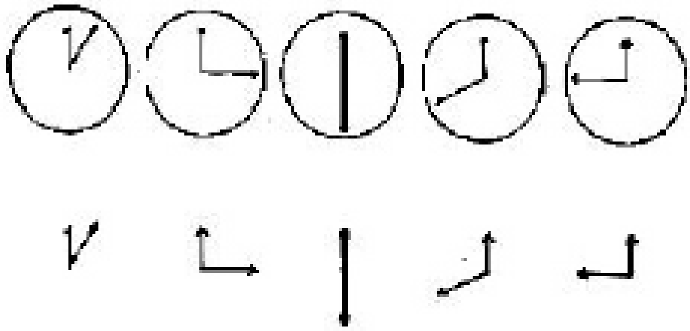
क्या कोण का मतलब समझने के लिए जरूरी है कि हम किरण, रेखा आदि की परिभाषा से शुरूआत करें? क्या इससे बच्चे को यह समझने में मदद मिलेगी कि कोण दरअसल दो रेखाओं के बीच झुकाव का माप है या ज्यादा स्पष्ट रूप में कहें तो वह घूर्णन/धुमाव का माव है। हम इस माप का कुछ अनुभव गतिविधि आधारित तरीके से क्यों नहीं दे सकते?

एक अन्य ि"ाक्षक का भी यह मानना था कि बोर्ड पर कोण का चित्र बना देने व कोण की परिभाषा बच्चों को बता देने से बहुत सी उप अवधारणाएं छूट ही जाती हैं। उन्होंने बताया कि हमें बच्चों को यह सिखाना चाहिए कि कोण एक दि"ाा और दूसरी दि"ाा के बीच परिवर्तन का माप है। परन्तु यह परिभाषा बच्चों के लिए शुरूआत में थोड़ी ज्यादा ही मु"िकल हो जाएगी। अतः उनका सुझाव था कि सही वक्त अपने तक कोई परिभाषा देनी ही नहीं चाहिए। हम उन्हें सहजता से यह बता सकते हैं कि जब दो किरणें एक बिन्दु पर मिलती हैं, तो हमें एक कोण मिलता है। आगे चलकर हम उन्हें बता सकते हैं कि इस कोण से हमें दो दि"ााओं के बीच के अन्तर का पता चलता है।

कई लोगों की चिन्ता यह होती है कि किसी अवधारणा की औपचारिक परिभाषा दिए बगैर ि"ाक्षण में तार्किक सटीकता नहीं आती। उन्हें इस बारे में सोचना चाहिए कि बच्चे किस स्तर पर इस तरह की अमूर्तता/तार्किक सटीकता कर सकते हैं। क्या यह पहले 'किरण' की अवधारणा को पढ़ाया जाए व उसके बाद ही कोण की अवधारणा पढ़ाई जाए, शायद नहीं। ऐसा करने का एक कारण तो यह हो सकता है कि आप कोण को सटीकता से परिभाषित करना चाहते हैं। लेकिन क्या यही हमारा लक्ष्य है? यानि कोई भी अवधारणा पढ़ाने से पहले हमें अपने से सवाल करना चाहिए। ऐसा सवाल से सीखने

वालों को किसी निर्धारित पाठ्यपुस्तक में दिए गए तरीके से कहीं ज्यादा स्वाभाविक रूप से सीखने में मदद मिलेगी। अब हम ि"ाक्षिका की ि"ाक्षण प्रक्रिया को थोड़ा विस्तार से देखें।

उदाहरण : सबसे पहले ि"ाक्षिका ने बच्चों को एक घड़ी का एक माडल दिखाया। उन्होंने बड़े कांटे को 4 के आस–पास तथा छोटे कांटे को 10 के आसपास रखा ताकि घड़ी 10:20 दिखाए। उन्होंने बच्चों का ध्यान कांटों की तरफ दिलाते हुए कहा कि ये दो कांटे एक कोण बनाते हैं। वे कांटों की स्थिति बदल ली गई व हर बार वे समझाती गई कि दो कांटों के बीच बना कोण क्या है।



इसके बाद, ि"ाक्षिका ने विभिन्न वस्तुओं यथा दो पैंसिलों को 45 के कोण पर, दो तिल्लियों को 50 के कोण पर पकड़कर पूछा कि कया 'यहां एक कोण बना है?' इस तरह की ठोस गतिविधियों के जरिए, जो उनके साथ–साथ बच्चे भी कर रहे थे, उन्होने बच्चों को यह बताने की कोि"ा"ा की कि 'जब दो किरणें एक बिन्दु पर मिलती हैं, तब हमें एक कोण मिलता है।' साथ ही, उन्होंने बच्चों को यह भी बताया कि कोण बनाने वाली दो किरणों को कोण की भुजाएं भी कहा जाता है।

इस प्रकार उसने सभी बच्चों को यह एहसास करने का मौका दिया कि कोण किस प्रकार 'दि"ाा परिवर्तन' को दिखाता है। ि"ाक्षिका ने समय समय पर कक्षा ने इसी अवधारणा को लेकर कुछ और भी गतिविधियां की। जब तक उसको यह तसल्ली नहीं हो गयी कि बच्चे ये समझ चुके है। कि कोण 'दि"ाा में घुमाव' को द"ााता है।

प्र"न : अपने आस–पास की वस्तुओं में इस तरह के घुमाव या झुकाव को नोट कीजिए तथा नीचे अंकित कीजिए :

....

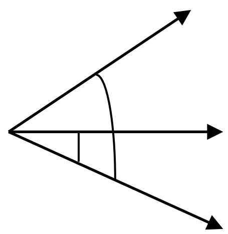
....

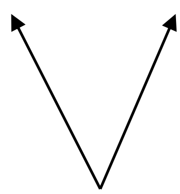
प्र"न : बच्चों में कोण की अवधारणा की समझ के मूल्यांकन हेतु आप कौन सी गतिविधियों/अभ्यासों का उपयोग करेंगे?

कोण नापना : कोण नापने में बच्चों की समस्याएं मुख्यतः नापने में उपकरण यानि चांदे को गलत ढंग से इस्तेमाल करने की वजह से पैदा होती है। बच्चों को दो स्थितियों में चांदे के उपयोग में दिक्कत होती है :

क. जब एक ही शीर्ष पर एक से अधिक कोण हों

ख. जब कोई भी किरण क्षैतिज न हो





क ख

चांदे का इस्तेमाल करते हुए ऐसी गलतियां क्यों होती हैं,

1. बच्चों को न्यून व अधिक कोण की समझ नहीं होती।
2. कोण नापते वक्त बच्चे चांदे की शून्य चिन्ह वाली आधार रेखा की बजाय चांदे के एक किनारे को देखते हैं।
3. चांद पर एक ही कोण पर दो–दो अंक होते हैं। बच्चे गलत अंक पढ़ लेते हैं।
4. वे कोण के शीर्ष को चांद के मध्य बिन्दु पर नहीं रखते।
5. धातु के कुछ अपारद"र्ाी चांदों में, वे जिस कोण को नाप रहे हैं, वही छिप जाता है।

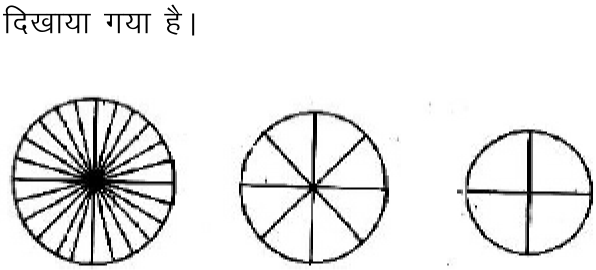
प्र"न : उपरोक्त कथनों के बारे में सोचते हुए इस प्र"न का जवाब दीजिए कि कोण नापना शुरू करने से पहले बच्चे को क्या–क्या आ जाना चाहिए?

प्र"न : किसी 10 या 11 साल की बच्ची को चांद से कोण नापने को कहिए। वह यह काम करते हुए किस किस्म की गलतियां करती हैं?

चांद से कोण नापने की दिक्कतों पर गौर करें तो हम यह समझ पाएंगे कि इन दिक्कतों की एक वजह यह हो सकती है कि बच्चे वास्तव में चांद पर लिखे अंकों का अर्थ नहीं समझते। वे इनका सम्बंध किसी खास कोण के चित्र से नहीं जोड़ पाते। उन्हें यह भी पता नही होता िकइस अं"ा का मतलब क्या होता है। आमतौर पर कक्षा में होता यह है कि हम हमे"ाा इस अं"ा के सम्बंध को सेंटीमीटर/मीटर की इकाई से जोड़ देते हैं, जो दरअसल दूरी नापने की इकाइयां हैं। लेकिन, ऐसा करते वक्त हम इस प्र"न के बारे में विचार नहीं करते कि कोण मापन और दूरी मापन में क्या–क्या बाते भिन्न हैं।

यहां हम जिस बात पर जोर देना चाहते हैं, वह यह है कि किसी भी मापन के लिए एक इकाई होती है और वह दो स्थितियों के बीच के अंतर को मापता है। "िाक्षाविद् हैन्स फ्राउडेथल के अनुसार ''कोण ही एकमात्र ऐसी चीज है जिसकी एक कुदरती इकाई (एक पूरा चक्कर) है।'' अब, आपके पास दूरी/लम्बाई के दो माप हों, तो आप उन्हें जोड़ सकते हैं। कोण को लेकर भी क्या यही होता है? बच्चों को ऐसे सवालों पर विचार करने का मौका दिया जाना चाहिए। परन्तु उससे पहले जरूरी होगा कि हम उन्हें कोणीय मापन की इकाई का अहसास दें। आइए। एक "िाक्षिका से सुनते है। कि वे बच्चों को कोणीय मापन की इकाई समझने में मदद देने हेतु आमतौर पर क्या करती हैं।

डदाहरण : मैं सबसे पहले कोणों का एक संग्रह तैयार कर लेती हूं। इसके लिए मैं गत्ते पर अलग–अलग व्यास के गोले लेती हूं और उन्हें व्यास खींच–खींचकर खण्डों में बांट देती हूं, जैसा कि चित्र 13 क, ख और ग में दिखाया गया है।



(क) (ख) (ग)

ऊपर तीन वृत्त दिये गये हैं। वृत्त क को 15^0–15^0 के खण्डों में, वृत्त ख को 45^0–45^0 के खण्डों में तथा वृत्त ग को 90^0–90^0 के खण्डों में बांटा गया है। अब हम हर वृत्त में से कुछ खण्ड काट सकते हैं। अब हम बच्चों से कह सकते हैं कि वे कोण के साइज के अनुसार इन खण्डों के समूह बनाएं। हम 90^0 वाले खण्डों को समकोण, बच्चे समकोण से परिचित ही हैं, 45^0 वाले खण्डों को लालकोण तथा 15^0 वाले खण्डों को भूरा कोण कह सकते हैं। जैसा कि नीचे के चित्र–14 में दिया गया है।

(I) (II) (III)

हम बच्चों से हम सकते हैं ि कवे खण्डों को एक–दूसरे के उपर रखकर कोणों की परस्पर तुलना करें। भूरे कोण को कोण की इकाई मानकर निम्न प्र"नों के जवाब दें।

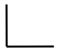
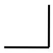
1. सबसे छोटा कोण कौन सा है?
2. सबसे बड़ा कोण कौन सा है?
3. लाल कोण को पूरा ढ़कने के लिए कितने भूरे कोणों की जरूरत होगी?

(क) (ख)

इससे बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि तीन भूरे कोण से एक लाल कोण बनता है। इसी प्रकार से 6 भूरेकोण से 1 समकोण बनता है। यानि 1 समकोण 6 समकोण के बराबर है। इसके बाद हम उन्हें कोण की सर्वमान्य इकाई यानि 1 अं"ा के बारे में बता सकते हैं। 1 अं"ा बहुत ही छोटा खण्ड होता है और भूरे कोण को 15 भागों में बांटने पर 1 अं"ा प्राप्त होता है। चांदे का उपयोग करते समय बच्चे जान पाएंगे कि समकोण 90^0 का होता है क्योंकि यह 1–1 अं"ा द"ार्ाने वाले 90 खण्डों के बराबर होता है।

कोण नापने की प्रक्रिया में भी चार मूलभूत गणितीय विचार शामिल होते हैं। ये हैं :

1. तुलना– बच्चे परिणाम के लिहाज से दो कोणों की तुलना कर पाएं।
2. संक्रामकता : यदि A, B, C तीन कोण दिए हैं और A>B व B>C तो A>C। पहला कोण दूसरे से बड़ा और दूसरा तीसरे से बड़ा है तो पहला कोण तीसरे कोण से बड़ा है।
3. संरक्षण : बच्चों को यह देख पाना चाहिए कि कोण के मापन में कौन सी चीजें प्रभावकारी नहीं हैं।

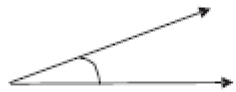
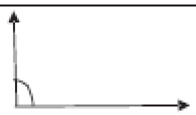
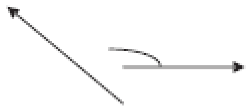
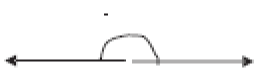
 जैसे  और  एक ही कोण द"ार्ाते हैं।

4. इकाई की समझ

एक ि"क्षक ने कहा ''महत्वपूण्र यह है कि बच्चा यह जाने कि चांद का मध्यबिन्दु कहां है और इसे ढूंढना क्यों जरूरी है। इससे जब चांद पर 0 साफ–साफ अंकित नहीं होता जब भी बच्चों को चांदे का सही इस्तेमाल करना है। इसके बाद फिर चांद के मध्य बिन्दु का कोण के शीर्ष पर रखकर चांद की उपरी या नीचे वाली लाईन में दोनों छोरों की संख्याओं को पढ़कर उनके बीच का अंतर पता कर लें। बस कोण का माप मिल गया।

प्र"न : आपके कोण मापने के तरीके में और इसमें कया फर्क है?

कोण के विभिन्न प्रकार :

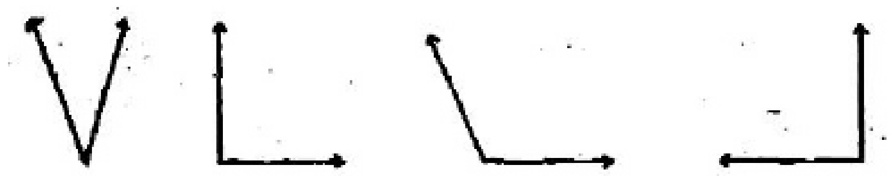
कोण का नाम	कोण की रचना	कोण की माप
शून्यकोण		जिस कोण की माप 0° हो
न्यूनकोण		जिस कोण की माप 0° से बड़ा तथा 90° से छोटा हो
समकोण		जिस कोण की माप 90° हो
अधिककोण		जिस कोण की माप 90° से बड़ा तथा 180° से छोटा हो
ऋजुकोण		जिस कोण की माप 180° हो
पुनर्यक्त कोण		जिस कोण की माप 180° से बड़ा तथा 360° से छोटा हो
पूर्ण कोण		जिस कोण की माप 360° हो

प्र"न : घड़ी की सुईयों के बीच बनने वाले कोणों को देखें तथा निम्न प्र"नों के उतर दें।

1. तीन बजे घड़ी के मिनट एवं घंटे की सुईयों के बीच कितने डिग्री का कोण बनेगा? कोण का नाम बताइए।
2. छः बजे घड़ी के मिनट एवं घंटे की सुईयों के बीच कितने डिग्री का कोण बनेगा? कोण का नाम बताइए।
3. नौ बजे घड़ी के मिनट एवं घंटे की सुईयों के बीच कितने डिग्री का कोण बनेगा? कोण का नाम बताइए।
4. रात के बारह बजे घड़ी के मिनट एवं घंटे की सुईयों के बीच कितने डिग्री का कोण बनेगा? कोण का नाम बताइए।

कोण की अवधारणा के ि"क्षण में एक समस्या यह आती है कि कई बार किसी एक रेखाचित्र को उदाहरण के तौर पर बार–बार प्रयोग करने से बच्चे उसे सभी स्थितियों कें लिए सही समझ लेते हैं।

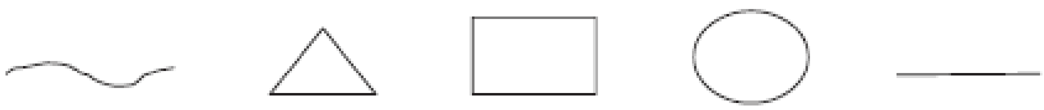
एक ि”क्षक के अनुभव से यह बात समझने में मदद मिलेगी। जब भी वे कोण की बात करती है तो वे हर मर्तबा दो किरणें बनाती हैं जिनमें से एक क्षतिज होती तथा दाईं ओर इंगित करती होती हैं। एक बार उन्होंने अपनी कक्षा–5 के छात्रों की समकोण, न्यूनकोण व अधिककोण की समझ का मूल्यांकन करने के लिए इस तरह के कुछ चित्र बनाएं।

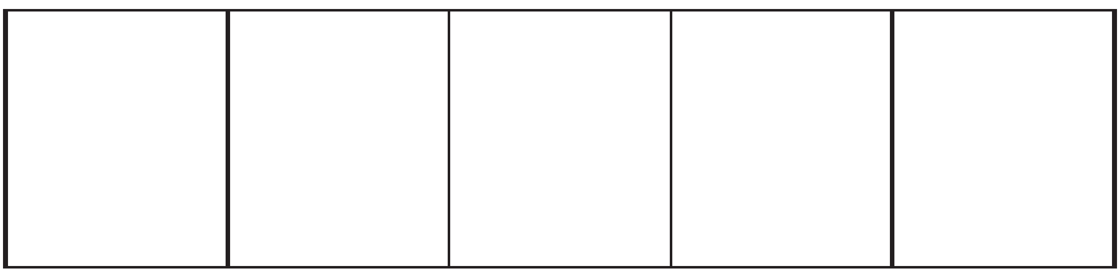


चित्र बनाने के बाद उन्होंने बच्चों से पूछा कि हर आकृति में दिखाया गया कोण किस प्रकार का है। एक छात्र ने जवाब दिया कि पहले तीन कोण तो न्यून, सम और अधिक कोण हैं तथा चौथा वाला बांया कोण है। आपको क्या लगता है बच्चे ने ऐसा जवाब क्यों दिया होगा?
ऐसा इसलिए क्योंकि जब भी हम कोणों की बात करते हैं चाहे वह समकोण हो, अधिक कोण अथवा न्यून कोण तो उसका चित्र दायीं दि”ाा की तरह ही बनाते हैं। अतः जरूरी है कि जब हम इस तरह की अवधारणाओं पर काम करें तो बच्चों को यह भी स्पष्ट तौर पर समझने का मौका दे कि 'कोण दि”ाा में घुमाव को द”ार्ााता है और यह घुमाव किसी भी दि”ाा में हो सकता है।''

प्र”न : बच्चों को विभिन्न किस्म के कोणों की मानसिक तस्वीर बनाने में मदद के लिए गतिविधियां सुझाइए।

प्र”न : आगे दिए गए आकृतियों की सहायता से खानों में कुछ चित्र बनाइए।

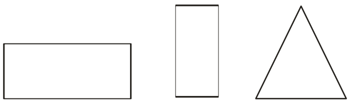




उपर की गतिविधियों में हमने आकृति निर्माण में विभिन्न ज्यामितीय अवयवों यथा बिन्दु, रेखा, किरण, रेखाखण्ड एवं कोण आदि का प्रयोग किया है। सीधी एवं घुमावदार रेखाओं के प्रयोग से बनी ये सभी आकृतियां रैखिक आकृतियां हैं।

5.6 सम आकृतियां

सम आकृति और असम आकृति एक और ऐसा विषय है जिसके बारे में अधिकांश बच्चों तथा कुछ शिक्षकों में भी गलतफहमी होती है। बच्चों को सम और असम आकृतियों के बीच अंतर समझाने के लिए आप अपने स्कूल के बच्चों के साथ एक गतिविधि कर सकते हैं। कागज के कुछ कटे तिकोन, चतुर्भूज, वृत्त इकट्ठे कर लिजिए। बच्चों को उनको पहचानने दें तथा उनकी भुजाओं व कोणों की संख्या गिन लेने दें। बच्चों से कहे कि वे एक–एक करके भुआएं मापें व उन आकृतियों को अलग करें जिनकी सभी भुजाओं की लम्बाई बराबर है।
उसके बाद वे यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि क्या इन आकृतियों में बनने वाले सभी कोणों का माप भी समान है? बच्चे जब समान भुजाओं व समान कोणों वाली आकृतियों को पहचानने लगे। विभिन्न आकृतियों में से ऐसी आकृतियां अलग कर बता सके तब उन्हें बताया जा सकता है कि ये सम आकृतियाँ है। और ऐसी सम आकृतियाँ है जिनके सिर्फ दो विभाएँ हैं। (यानी जिनका विस्तार सिर्फ दो दिशाओं में होता है। जैसे–



यहाँ इस बात रेखांकित करना भी जरूरी है कि सम आकृतियाँ (Regular figure) व सम आकार (regular shapes) में अन्तर होता है। सम आकृतियों की अवधारणा पर कार्य करते वक्त शिक्षक को इस बात का ध्यान रखना आवश्यक है कि वे सम आकृतियों की बात कर रहे है अथवा सम आकारों की। सम आकृतियाँ जैसा कि पहले भी बताया गया है– वे है जिनका विस्तार दो दिशाओं में हो सकता है। और सम आकार में वे वस्तुएं सम्मिलित होगी जो त्रिविनिय है व जिनकी भुजाओं की लम्बाई व कोनों का माप समान है उदाहरण के लिये पासा, प्रिज्म व इस तरह के अन्य वस्तुएं।
प्रश्न : आप कुछ सम आकृतियों व सम आकारों के चित्र बनाएं।

अब तक बच्चे शायद सोचने लगेंगे कि फिर असमाकृतियां कौन सी होती हैं। कुछ सवाल पूछकर आप उन्हें खुद ही यह समझने में मदद कर सकते हैं। जो आकृतियां सम नहीं है उनकी क्या विशेषताएं है? क्या उनकी सभी भुजाओं की लम्बाई बराबर है? क्या उनकी सभी कोण बराबर है?

प्रश्न : आपके अन्दाज से उनका उत्तर क्या होगा? यदि वे हां कह देते है, तो आप कैसे उन्हें समझाएंगे कि उनका जवाब गलत है? कोई गतिविधि सोचिए।
गतिविधि जिससे बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि सारी आकृतियां सम नहीं होती।
उदाहरण : एक बर्तन में पानी लीजिए और पानी को फर्श या दीवार पर जोर से फेंकिए। बच्चों को पानी से बनी डिज़ाइन देखने दीजिए।

बच्चे देखेंगे कि इन आकृति के कोर न तो सीधे ही हैं ओर न ही वृत्त के हिस्से हैं। आप कागज पर स्याही छिड़ककर भी डिज़ाइन बनाकर उन्हें दिखा सकते हैं उन्हें यह समझने का अवसर दें कि ऐसी आकृतियों सम नहीं होती इसलिए इन्हें असमाकृति कहा जाता है। आप बच्चों को आकाश में बादलों से

बनी डिज़ाइन दिखाकर भी पूछ सकते हैं कि वे सम हैं या असम। इन आसान गतिविधियों से बच्चों को सम व असमाकृतियों में फर्क करने में मदद मिलेगी।

5.7 द्विवीमीय आकृतियों एवं त्रिविमीय वस्त्‌ओं को पहचानना तथा उनके वि”ोश गुणों की समझ

5.7.1 त्रिभुज

नीचे दिए गए तीन बिन्दुओं को सरल रेखा से घेर कर बंद आकृति बनाएं।

क .   ख .

ग .

बनायी गई बंद आकृति तीन सरल रेखाओं से घिरी है, ऐसी आकृतियां त्रिभुज कहलाती हैं। त्रिभुजों के कुछ प्रकार निम्नवत हो सकते हैं :

एक बार वे सम आकृतियों से परिचित हो जाएं तो बच्चों को विभिन्न प्रकार के त्रिभुज दिखाए जा सकते हैं। इसके लिए अलग–अलग लम्बाई की तिल्लियां जुटा सकते हैं। बच्चों से कहें कि वे निम्नानुसार तिल्लियों के त्रिभुज बनाएं

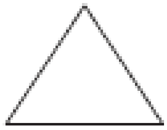
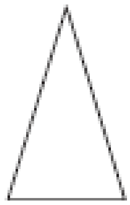
जिसमें सारी तिल्लियां एक लम्बाई की हों।

दो तील्लियां एक ही लम्बाई की हों।

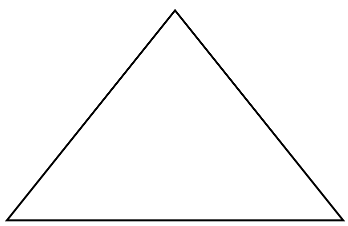
तीनों तील्लियों अलग–अलग लम्बाई की हो।

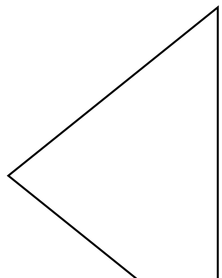
बच्चों के द्वारा स्वयं गये त्रिभुजों को साथियों द्वारा बनाये गये त्रिभुजों से मिलान कर उनमें एकरूपता ढूंढने को कहें। आप यह सुझा सकते हैं कि वैसे तो ये सारे त्रिभुज ही हैं मगर भुजाओं की लम्बाई के आधार पर इनके बीच भेद करने के लिए इन्हें अलग–अलग नाम देना जरूरी है। इस तरह आप उनका परिचय समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु त्रिभुज से करा सकते हैं।

भुजा के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं :

त्रिभुज का चित्र	त्रिभुज का नाम	त्रिभुज के गुण
	समबाहु त्रिभुज	इस त्रिभुज के तीनों भुजाओं की लम्बाई समान माप की होती हैं।
	समद्विबाहु त्रिभुज	इस त्रिभुज के दो भुजाओं की लम्बाई समान माप की होती हैं।
	विषमबाहु त्रिभुज	इस त्रिभुज के तीनों भुजाओं के लम्बाई अलग–अलग माप की होती हैं।

अक्सर देखा गया है कि बच्चों के मन में कई शब्दों के अर्थ को लेकर गलतफहमी होती है। मसलन, कई बच्चों के लिए तिकोन केवल वही आकृति है जो समबाहु हो। इसके अलावा कई बार बच्चे आकृति की स्थिति को लेकर भी भ्रमित हो जाते हैं। मसलन, यदि किसी तिकोन की एक भुजा उस कागज जिस पर वे काम कर रहे हैं, के निचले किनारे के समान्तर न हो, तो कई बार वे उसे तिकोन के रूप में पहचान ही नहीं पाते।



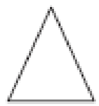
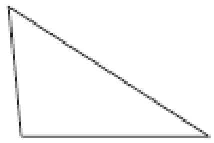


बच्चों को ये भी बतायें कि त्रिभुज में न केवल तीन भुजाएं होती हैं बल्कि तीन कोण एवं तीन शीर्ष भी होते हैं। उनसे किसी दिए गए त्रिभुज की भुजा, कोण एवं शीर्षों का नाम लिखने का भी अभ्यास करायें। जैसे उपर के त्रिभुज का नाम 'कखग' है तािा तीन शीर्ष क्रम”ाः 'क', 'ख' एवं 'ग' हैं।

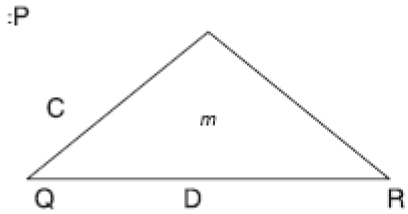
बच्चों को ये अवधारणाएं समझाने के लिए उन्हें काफी अभ्यास का मौका दिया जाना चाहिए। ि”ाक्षक विभिन्न आकार की तीलियों का इस्तेमाल करके कई तरह के त्रिभुज बनाकर बच्चों से उन्हें पहचानने को कह सकते हैं। बच्चों को यह अव”य समझ आ जाए कि किसी भी लम्बाई की तीन तीलियों से तिकोन बने यह जरूरी नहीं होता। यह आव”यकक है कि किन्हीं भी दो तीलियों की लम्बाई का जोड़ तीसरी तीली की लम्बाई से ज्यादा होना चाहिए। यह आव”यकता पूरी होगी तभी त्रिभुज बनेगा।

प्र”न : किसी भी लम्बाई की तीन तीलियों से तिकोन नहीं बनाया जा सकता। बच्चों को यह अवधारणा समझाने के लिए एक गतिविधि बताइए।

कोण के आधार पर भी त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं :

त्रिभुज का चित्र	त्रिभुज का नाम	त्रिभुज के गुण
	न्यूनकोण त्रिभुज	इस त्रिभुज के तीनों कोणों की माप 0^0 से बडी तथा 90^0 से कम की होती हैं। अर्थात् तीनों कोण न्यूनकोण हैं।
	समकोण त्रिभुज	इस त्रिभुज के एक कोण की माप 90^0 की होती हैं। अर्थात् एक कोण समकोण है।
	अधिककोण त्रिभुज	इस त्रिभुज के एक कोण की माप 90^0 से बड़ी तथा 180^0 से कम होती हैं। अर्थात् एक कोण अधिककोण है।

त्रिभुज का अभ्यंतर एवं बहिर्भाग

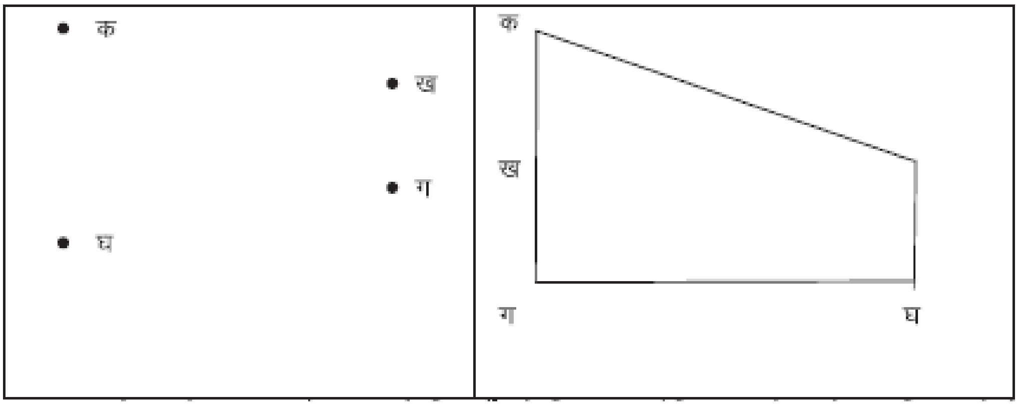


त्रिभुज PQR में बिन्दु A तथा B त्रिभुज के अंदर यानि अभ्यंतर भाग में हैं तथा बिन्दु C त्रिभुज के बाहर यानि बहिर्भाग में है जबकि बिन्दु D त्रिभुज की भुजा यानि त्रिभुज पर है। उपर बने त्रिभुज के चित्र में बिन्दु 'अ', 'ब' एवं स को इस प्रकार दिखाइए कि बिन्दु 'अ' त्रिभुज के अभ्यंतर में , बिन्दु 'ब' त्रिभुज पर तथा बिन्दु 'स' त्रिभुज के बहिर्भाग मे हो।

प्र”न : तीन बिन्दु एक सीध में लिजिए। उन बिन्दुओं को आपस में मिलाईए। क्या आपने त्रिभुज बनाया? यदि नहीं बनाया तो उसका कारण क्या है? सोचिए।

5.6.2 चतुर्भूज

टाइए, अब चार बिन्दु इस प्रकार लें जिसमें कोई भी तीन बिन्दु एक रेखा में न हो।



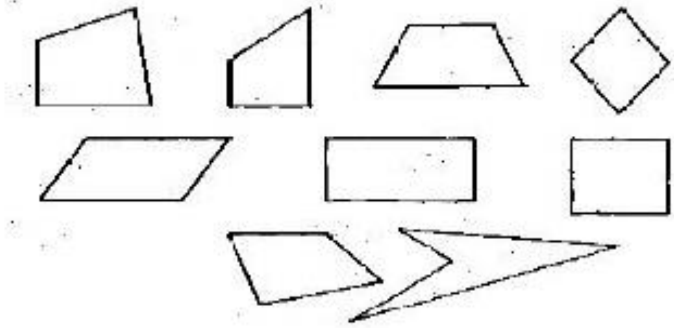
अब सरल रेखा की सहायता से उन चारों बिन्दुओं को मिलाइए। सोंचिए, आने खुली आकृति बनायी है या बंद आकृति? निर्"चत रूप से आपके द्वारा बनी आकृति एक बंद आकृति है। यह बंद आकृति चार भुजाओं से घिरी है। यह एक चतुर्भुज है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि चार भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति चतुर्भुज है।

तिकोन से परिचित कराने के बाद इसी तरह बच्चों का परिचय चतुर्भुज से करवाया जा सकता है। गतिविधियां इस तरह की हो जसे बच्चों की वर्तमान समझ को आगे ले जाने में मदद करे। यहां हम बच्चो के लिए एक गतिविधि सुझा रहे हैं।

उदाहरण : चार अलग–अलग लम्बाइयों की 50 तीलियां एकत्र कर लें। इन्हें 4 ढेरियों में रख दें। हर ढेरी में एक ही लम्बाई की तील्लियां हो। बच्चे आपके निर्दे"ा के अनुसार अपनी पसन्द की चार तील्लियां उठा लें।

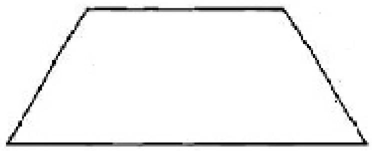
1. एक ही ढेरी में से एक ही लम्बाई की चार तीलियां।
2. एक ढेरी में से 2 तथा दूसरी ढेरी में से 2 तीलियां।
3. एक ढेरी में से 3 तथा दूसरी में से 1 तीली।
4प्रत्येक ढेरी में से 1–1 तीली।

अब उनसे कहिए िकवे अपनी खपच्चियों को फ"ा पर सजाकर चौकोर आकृति बनाएं। उनके द्वारा बनाई गई आकृति चित्र 17 की किसी आकृति के समान हो सकती है।



बच्चों को पहले इन आकृतियों को अच्छी तरह से देखने दीजिए। फिर उनसे यह पूछ सकते है। कि प्रत्येक आकृति में कितने किनारे हैं, कितने छोर हैं, वगैरह। चतुर्भुज वगैरह।

आप यह द”ाा सकते हैं कि कैसे उन्हीं चार खपच्चियों को अलग–अलग स्थितियों में रखकर विभिन्न चतुर्भुज आकृतियां बनाई जा सकती है। किसी आकृति को दिखाकर उसका नाम बताना या किसी आकृति की नकल उतार कर उसे नाम देने से बच्चों का शब्द भण्डार विकसित होगा और उन्हें आकृतियों के विभिन्न हिस्सों के बीच परस्पर देखने में मदद मिलेगी। मसलन, समान्तर चतुर्भुज की आमने–सामने की भुजाओं की लम्बाई बराबर होती हैं। इसी प्रकार से समलम्ब बनाने के लिए दो तील्लियों को एक दूसरे के सामने इस प्रकार रखें कि हर बिन्दु पर उनके आपस की दूरी एक समान हो। बच्चों को यह पता करने दें कि चतुर्भुज के ये परस्पर समदूरस्थ कोर हैं। अब पहली दो तील्लियों के सिरों को जोड़ती हुई दो और तीलियां इस तरह रखें कि चतुर्भुज बन जाए।



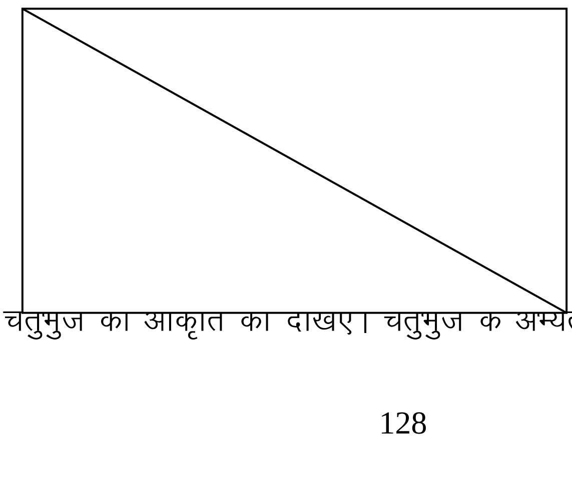
अब समदूरस्थ तीलियों में से किसी एक की स्थिति बदल दें और बच्चों को देखने दें कि अब यह आकृति समलम्ब नहीं रही। इसी प्रकार से सभी आकृतियों की वि”ोषताओं का परिचय दीजिए ताकि बच्चे हर आकृति और उसके खास गुण को पहचान सकें जैसे कि :

1. चार किनारे वाली सभी आकृतियां चतुर्भुज हैं।
2. चतुर्भुज की चारों भुजाएं अलग–अलग लम्बाई की भी हो सकती है और समान लम्बाई की भी हो सकती हैं।
3. समलम्ब में एक जोड़ी भुजाएं समदूरस्थ होती हैं।
4. समान्तर चतुर्भुज में आमने–सामने की भुजाएं बराबर लम्बाई की होती हैं।
5. हर समान्तर चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज होता है।
6. हर आयत समान्तर चतुर्भुज भी होता है।
7. हर वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज भी होता है और आयत भी होता है।

प्र”न : वर्ग आयत भी होता है यह आप बच्चों को कैसे समझायेंगे?

प्र”न : कक्षा में की जानेवाली एक ऐसी गतिविधि सुझाइए जिसमें हर टोली को यह पता करना हो कि उन्हें दिए गए चतुर्भुज के समान दिखनेवाली कौन–कौन सी चीजें कक्षा में या उनके आस–पास उपलब्ध हैं।

किसी चतुर्भुज में चार भुजा, चार कोण एवं चार शीर्ष होते हैं। चतुर्भुज में आमने–सामने की भुजा एक कोण का दो जोड़ा होता है। दो आमने–सामने के शीर्षों को मिलाने वाला रेखाखण्ड रेखा चतुर्भुज का विकर्ण कहलाती है।



प्र”न : ऊपर बने चतुर्भुज की आकृति को दीखए। चतुर्भुज के अभ्यंतर एवं बर्हिभाग को पहचानिए।

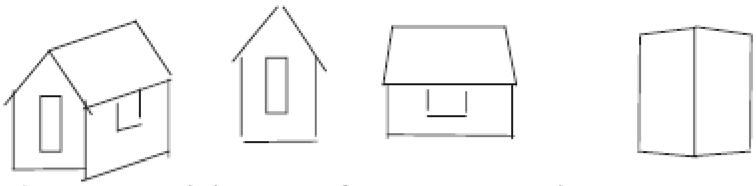
द्विविमीय आकृतियों में लम्बाई और चौड़ाई जैसे दो माप होते हैं। इस तरह की आकृतियों में कोण, वृत, त्रिभुज, आयत, चतुर्भुज, आदि आते हैं। जबकि ठोस वस्तुओं में लम्बाई, चौड़ाई के साथ–साथ उंचाई की माप भी होती है। जसैः–

ठोस वस्तुओं को ध्यान से देखें। आप पायेंगे कि प्रत्येक ठोस में कई सतह होते हैं। ये सतह जहां मिलते हैं, किनारा कहलाता है, जो एक रेखाखण्ड होता है। ठोस वस्तुओं में से आपको किनारे मिलेंगे तो कुछ में किनारे नहीं मिलेंगे। गेंद में कोई किनारा नहीं मिलेगा। ईंट में आपको कई किनारे एवं सतह मिलेंगे। किनारे जहां मिलते हैं, शीर्ष कहलाते हैं जो एक बिन्दु होता है।

एक क्रियाकलाप किया जाये :

मचिस की एक डब्बी लीजिए एवं उसको विभिन्न तलों के सहारे एक–एक करके रखिए एवं इसका चित्र बनाइए। आपने देखा कि विभिन्न तल पर माचिस की डिब्बी कुछ अलग तरह की दिख रही है। परन्तु जब गोले को आप विभिन्न स्थितियों में रखकर देखते हैं, तो पाते हैं कि हर बार गोला एक ही तरह का दिखता है। सोचिए, ऐसा क्यों होता है।

उपर के अनुभवों के आधार पर हम कह सकते हैं कि अलग–अलग तलों पर रखने पर त्रिविमीय आकृतियां अलग–अलग दिखाई दे सकती हैं। एक ही तल पर रखी वस्तुएं भी अलग–अलग स्थानों से देखने से अलग–अलग तरह की दिखेंगी। इसे एक उदाहरण से और समझने का प्रयास करें। नीचे एक झोपड़ी के चित्र को अलग–अलग स्थान से बनाकर दिखाया जा रहा है।



इसी प्रकार किसी घनाभाकार डब्बे का चित्र नीचे के खानों में दिए गए स्थिति के अनुसार बनायें :

सामने से दृश्य	पार्श्व दृश्य	ऊपर से दृश्य

बच्चों को किसी त्रिविमीय वस्तु का फोटो कैमरा या मोबाईल कैमरा की सहायता से निम्न तीन स्थितियों में फोटो खींचने को कहिए तथा नीचे के खाने में उचित जगह चिपकाने को कहिए :

सामने से लिया गया दृश्य	पार्श्व से लिया गया दृश्य	ऊपर से लिया गया दृश्य

5.8 सममित आकृतियाँ

किसी चित्र में सममिति है यह तब कहा जा सकता है जब चित्र को, उसी के तल में खींची गई कोई रेखा दो बराबर हिस्सों में बांट दे और जब चित्र को इस रेखा से मोड़ा जाए तो चित्र के दो अर्धांश हर प्रकार से एक–दूसरे से मेल खाएं। इस रेखा को चित्र का सममिती–अक्ष कहा जाता है।

हमारे आस–पास सममिति के कई उदाहरण मौजूद होते है। चाहे फिर वह पेड़ों की पत्तियाँ हो अथवा घर की दीवार, कक्षा का बोर्ड हो अथवा कॉपी का पृष्ठ। सभी में सममिति है। लेकिन इसमें यह समझना महत्वपूर्ण हे कि सममिति रेखा कौनसी है? उदाहरण के लिये देखें –

(अ) (ब)

चित्र

चित्र में जो रेखा खीचीं गयी है उसमें पत्ती के दो बराबर हिस्से किये गये हैं। और दोनों हिस्से एक दूसरे के एक रूप है। अतः पत्ती में इस सममित अक्ष के अनुसार सममिति है। लेकिन क्या दूसरी पत्ती में सममिति है? इसका उत्तर आप दीजिये।

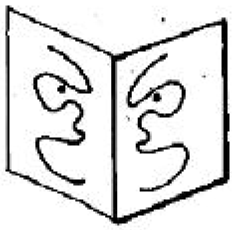
सममित आकृतियों का अध्ययन करने में सबसे महत्वपूर्ण यह समझना है कि वह रेखा कौनसी है जिसके सापेक्ष वह आकृति सममित है। यद्यपि बच्चे ऐसे बहुत से चित्र बनाते रहते हैं जिनमें सममिति होती ही है लेकिन उन्हें इस गुण का पता नहीं होता। हमें बस उनकी इस गुण की तरफ ध्यान आकर्षित करने व समझने में मदद करनी है। यहां मैं एक गतिविधि बता रही हूं जो रघु तब कर रहा था, जब मैं उसके घर गई थी।

उदाहरण : रघु के पास एक स्याही की बोतल और एक धागा था। उसने धागे को स्याही में डुबोकर उसे अपनी नोट बुक में रख दिया। फिर उसने नोट बुक को बन्द करके दबा दिया। अब उसने नोट बुक खोली और धागे को धीरे–धीरे उठा लिया। उसने मुझे नोटबुक में बना वह डिज़ाइन दिखाया।

मैं : बढ़िया! अब ज़रा अपनी नोटबुक में बने दो डिज़ाइनों को देखो। जरा देखो कि क्या उनमें तुम कोई अन्तर ढूंढ सकते हो।

उसने दोनों चित्रों को बारीकी से देखना शुरू किया। थोड़ी देर बाद उसने कहा कि वह कोई अन्तर नहीं ढूंढ पाया।

मै : तुम्हारा मतलब है कि दोनों डिज़ाइनें हूबहू एक सी हैं ?



रघु : हां! परन्तु पत्रिका के उन दोनों चित्रों जैसी समान नहीं है। मैं बता नहीं सकता कि ऐसा क्यों है।

मैंने उससे एक आइना लाने को कहा। वह भागकर ले लाया।

मैं : अब दोनों पन्नों के बीच आइने को खड़ा करके पकड़ो (यानी काग़ज के तल से लम्बवत्)। आइने का मुँह डिज़ाइन की तरफ रखो और बाएं पेज को आइने में देखो। क्या यह प्रतिबिम्ब दाएं पन्ने की डिज़ाइन जैसा है?

उसने प्रतिबिम्ब का अध्ययन किया (देखें चित्र 23)। फिर आइना हटाकर दाएं पन्ने के डिज़ाइन को देखा।

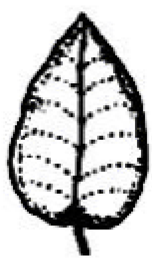
रघु : (मुस्कराते हुए) : मजेदार बात है। आइने में दाएं तरफ का डिज़ाइन बाई तरफ के डिज़ाइन जैसा दिखता है। है ना, आण्टी?

इसके बाद मैंने उसे एक आदमी की शक्ल को पूरा करने को कहा। मैंने आधी शक्ल बना दी (चित्र)।

उसने इसे, पूरा करने की कोशिश की मगर एकदम सही – सही न बना सका। मैंने उससे कहा कि लाइन पर आइना रखकर देखे कि क्या होता है। उसने देखा कि बायां भाग और उसका प्रतिबिम्ब मिलकर पूरा चेहरा बन गया।

मैं : अब तुम समझ सकते हो कि यदि हम इन्सान के चेहरे के बीचों बीच एक लाइन खींचे तो बांया भाग और दायां भाग समरूप होते हैं वे एक, दूसरे का प्रतिबिम्ब हैं। यही बात तुम्हारी नोट बुक के डिज़ाइन में भी है। दाएं पन्ने का डिज़ाइन, बाएं पन्ने के डिज़ाइन का प्रतिबिम्ब है और वे समरूप हैं।

मैंने उससे बाहर चलने को कहा। मैं उसे पेड़–पौधे दिखाना चाहती थी। मैंने उससे एक पत्ती तोड़कर उसका निरीक्षण करने को कहा (चित्र)।



मै : क्या तुम पत्ती के बीचों बीच एक नस देख रहे हो? क्या नस के दोनों ओर पत्ती का बायां भाग और दायां भाग समरूप हैं? कैसे पता लगाओगे?

उसने बारीकीं से पत्ती को देखा मगर यह न बता सका कि दोनों भाग समरूप हैं या नहीं। मैंने उससे पत्ती को नस पर से मोड़ने को कहा। उसने वैसा ही किया। मैंने पूछा कि "क्या दोनों भाग मेल खाते हैं?"

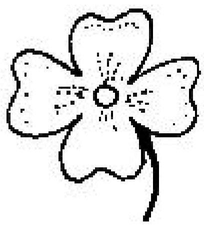
रघु : अच्छा! ऐसे पता करते हैं? हां, दोनों भाग पूरी तरह मेल खाते हैं। अब मैं समझ गया।

मैं : हम कहते हैं कि पत्ती में बीच की नस के दोनों ओर के भाग सममित हैं। तुम अलग–अलग पेड़ों की पत्तियां लेकर भी आजमा सकते हो कि क्या उनमें भी बीच की नस के दोनों ओर के भाग सममित हैं या नहीं।

रघु ने कई पत्तियां तोड़कर बीच से मोड़कर देखा। अधिकतर पत्तियाँ सममित थीं। कुछ नहीं भी थीं।

रघु : लेकिन यदि नस बीचों–बीच न हो, तो कैसे पता करेंगे कि पत्ती सममित है या नहीं?

मैं : इस चित्र को देखो (चित्र देखें)।



क्या तुम कोई ऐसी रेखा खोज सकते हो, जिसके इर्द–गिर्द यह चित्र सममित हो? एक धागा लेकर उसे चित्र के ऊपर रखो पता लगाओ।

उसे सोचने में थोड़ा वक्त लगा मगर फिर उसने मुझे ऐसी रेखाएं बताईं जिनके इर्द–गिर्द फूल सममित था।

मैं : इसका मतलब है कि किसी सममित आकृति में एक से अधिक सममिति अक्ष हो सकते हैं?

रघु : हां! मुझे पक्का विश्वास है।

मैं : शाबाश।

इसके बाद मैंने एक पत्ती को उसके सममिति–अक्ष यानी मध्य नस पर मोड़कर उसे दिखाया कि जब किसी सममित आकृति को सममिति–अक्ष पर से मोड़ा जाता है तो हमें उसके दोनों भागों के बजाय एक ही भाग नज़र आता है। इसके बाद उसने न केवल फूल, पत्ती बल्कि अन्य वस्तुओं यथा पृष्ठ थाली, चकला व अन्य वस्तुओं पर धागा रखकर देखने लगा। अचानक एक तितली देखकर वह उछल पड़ा और चिल्लाया 'आण्टी'। उसे सममित चीज़ का एक बढ़िया उदहारण मिल गया था।

प्रश्न : क्या सिखाने का यह तरीका उस पारम्परिक तरीके से ज्यादा कारगर है जिसमें शिक्षक ब्लैक बोर्ड पर चन्द सममित आकृतियां बनाकर विद्यार्थियों को, बगैर किसी प्रत्यक्ष अनुभव के, सममिति के बारे में सब कुछ बता देते हैं?

प्रश्न : कम से कम दो ऐसी गतिविधियाँ सुझाइए जो आप कक्षा में सममित आकृति की अवधारणा पढ़ाने के लिए करेंगे।

बच्चे, पत्तियों, फूलों, घर के दरवाजों, रंगोली, साड़ी व चादर के डिज़ाइनों में सममिति देख सकते हैं। इस तरह से वे अपने आसपास की तमाम चीज़ों में सममिति खोज सकते हैं। विभिन्न सम व असमाकृतियों की सममिति का प्रयोग करके तिकोन, वर्ग, आयत, वृत्त आदि जैसी परिचित ज्यामितीय आकृतियों में सममिति दिखाई जा सकती है।

बच्चे कागज़ की आकृति काटकर और उसे मोड़कर पता लगा सकते हैं कि क्या कोई ऐसी लाइन है जिस पर से आकृति को मोड़ने पर एक हिस्सा दूसरे से मेल खाता है। एक और मज़ेदार प्रयोग यह हो

सकता है कि किसी आकृति को ट्रेसिंग पेपर पर उतारें और इस कागज़ के पीछे की तरफ दिखाई पड़ने वाली आकृति की तुलना मूल आकृति से करें। हम उनको बता सकते हैं कि समभुज तिकोन के तीन सममिति–अक्ष तिकोन को छः बराबर भागों में बांट देते हैं। बच्चे यह भी देख सकते हैं कि वृत्त में तो अनगिनत सममिति–अक्ष होते हैं।

प्रश्न : निम्नलिखित अवधारणाएं सिखाने के लिए आप क्या गतिविधि सुझाएंगे?

(क) किसी आकृति में हर रेखा सममिति–अक्ष नहीं होती।

(ख) सममिति–अक्ष के दोनों ओर के संगत बिन्दु अक्ष से बराबर दूरी पर होते हैं।

(ग) वर्ग में 4 सममिति–अक्ष होते हैं जबकि आयत में सिर्फ दो होते हैं।

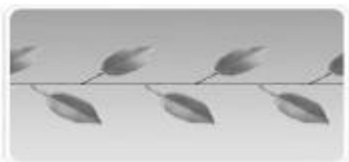
(घ) ताश के पत्तों पर बने चित्र बीच में खींची गई रेखा पर सममित होते हैं।

पेड़ों की पत्तियां जो टहनियों में लगी हों, को जमा कीजिए। उनको ध्यान से देखिए तथा बताइए कि इनमें कौन सी सममिति है। यदि किसी पेड़ की टहनी में पत्तियों की सजावट निम्नवत है। यह परावर्तन सममिति है।

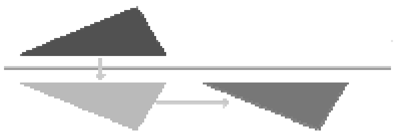
किसी फूल की सजावट निम्नवत है। यह घूर्णन सममिति है।

किसी पेड़ की टहनी में आपको निम्न प्रकार से पत्तियों की सजावट मिलेंगी। यह सजावट विसर्प सममिति का उदाहरण है।

जब अप चलते हैं तो आप अपने पीछे अपने पैरों के नि”ाान छोड़ते हुए चलते हैं। यह भी विसर्प सममिति का उदाहरण है।



विसर्प सममिति में परावर्तन एवं नि”चत दूरी दोनों होते हैं।



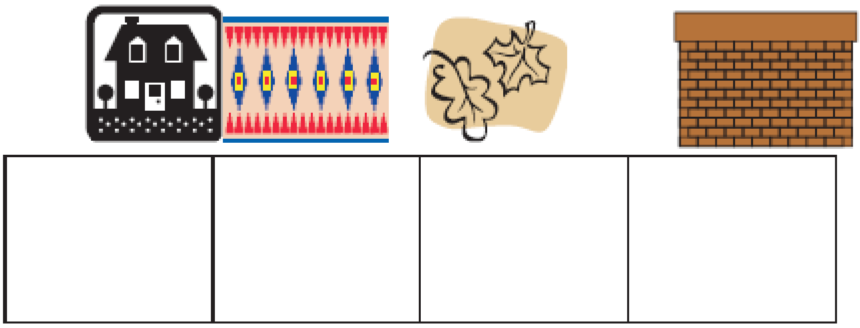
5.9 पैटर्न की अवधारणा

अपने आस–पास मौजूद वस्तुओं को देखकर कई बार आपने कहा होगा या लोगों को यह कहते हुए सुना होगा कि :

- आपके कपड़े का डिजाईन कितना सुन्दर है।

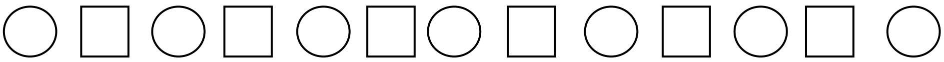
- चादर का प्रिन्ट बहुत अच्छा है।
- मैने आपकी छत तथा गेट पर लगी ग्रिल को देखा, बहुत ही अच्छा है।

नीचे बने कुछ डिजाईनों को देखिए। इसी तरह के व्यवस्थित क्रम में सजे डिजाईन आपको अक्सर दिखते हैं। कुछ इसी प्रकार का डिजाईन नीचे दिए खानों में बनाइए।



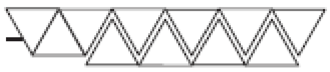
क्या हमने कभी ऐसा सोचा है कि इन डिजाईनों की सुंदरता एवं आकर्षकता के पीछे कोई व्यवस्थित क्रम होता है क्या? ऐसी वस्तुओं के सुंदर लगने के दो कारण हो सकते हैं :

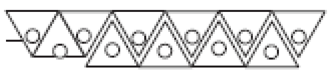
1. सममिति 2. क्रम



इसमें आकृति के दुहराव का एक निर्"चत क्रम है। इसमें सममिति एवं क्रम भी है।

आइए अब विचार करें कि पैटर्न कहते किसे हैं? किसी भी डिजाईन को ध्यान से देखिए। आप पायेंगे कि उन डिजाईनों में कुछ ज्यामितीय आकृतियां होती है, जिनकी सहायता से वे बनी होती हैं। अगर, इन्हें इसी क्रम में आगे बढ़ाया जाये तो डिजाईन आगे बढ़ती हैं। जैसे–





पैटर्न किसी गणितीय सम्बंध या तर्क आधारित सम्बंध को दुहराने की क्रिया है।

पैटर्न के लिए दो बातें आव"यक हैं : 1. सम्बंध स्थापित करना 2. लगातार दुहराना

अक्षर आधारित पैटर्न A B A B A B A ....

चित्र आधारित पैटर्न

गणित में हम संख्या आधारित या ज्यामिति आकृतियों पर आधारित पैटर्न पाये जाते हैं। आपने कक्षा में कई बार गुणा के प्र"नों को हल किया होगा, पहाड़े बनाये होंगे। क्या आपने बच्चों को बताया है कि

गुणा, गणना में तो सहायक है ही, साथ ही साथ पैटर्नों को पहचानने एवं बनाने हेतु वि”लेषणात्मक क्षमता का विकास करने में भी सहायक है। नीचे दिए गए पैटर्न पर ध्यान दीजिए।

$$1 \times 1 = 1$$
$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$

उपर का पैटर्न देखकर नीचे के खाली स्थान को पूरा करें।

11111×11111 = ...

111111×111111 = ____________________

$5^2 = 25$, $15^2 = 225$, $25^2 = 625$, $35^2 = 1225$, $45^2 = 2025$,

$55^2 = 3025$ $65^2 = 4225$, $75^2 = 5625$, तब 85^2 = ______ 95^2 = ______

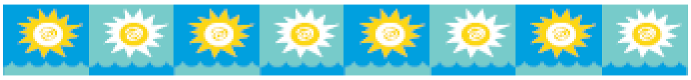
आप ऐसे ही कुछ पैटर्न बनाइए तथा उसमें निहित तर्क को स्पष्ट कीजिए।

____

____

____

नीचे बने बोर्डर को ध्यान से देखिए एवं उसमें बने पैटर्न का अवलोकन कीजिए।



इसमें पैटर्न को दो दि”ााओं में बढ़ाया गया है। किसी वालपेपर, रंगोली, पेंटिंग, आदि में आप देखेंगे कि उसमें निहित पैटर्न को दो दि”ााओं में बढ़ाया गया है। हमारे घरों में वि”ोष अवसरों पर बनाई जानेवाली रंगोलियां तथा वि”व प्रसिद्ध मधुबनी पेन्टिंग्स में भी उपयोग किये गये पैटर्नों को आप दोनों दि”ााओं में बढ़ते हुए देख सकते हैं।

पैटर्न का महत्व : किसी भी दिए गए पैटर्न में उपयोग किये गये रेखाओं एवं आकृतियों में अंतर्निहित सम्बंध को पहचानना सबसे महत्वपूर्ण होता है। इससे हमारी तर्क क्षमता का विकास होता है। पैटर्न में उपयोग किये गये क्रमबद्धता एवं नि”चत दूरी की पहचान हमारी तार्किक अभिक्षमता का परिचायक होता है। नये–नये पैटर्नों को गढ़ने की गतिविधि बच्चों में सृजनात्मक क्षमता का विकास करता है। पैटर्न बच्चों में गणितीयकरण की प्रक्रिया में सहायक है। यह गणित की अवधारणाओं को दैनिक जीवन से जोड़कर सीखने में सहायक होता है और यही गणित ि”ाक्षण का मुख्य उद्दे”य है।

5.10सारांश

- इस इकाई के अंतर्गत हमने सीखा है : नई अवधारणाओं का विकास जाने पहचाने अनुभवों के आधार पर बेहतर होता है। बन्द व खुली आकृतियों व अन्य कई अवधारणाएं सिखाने के लिए अलग–अलग तरीकों का उपयोग किया जा सकता है। कई मर्तबा बच्चे समतल/असमतल सतहों को चिकनी व खुरदरी सतह के समकक्ष मान लेते हैं। अण्डे, गेंद या बेलनाकार बर्तन की सतह को भी वह समतल समझते हैं। इसके लिए उन्हें कुछ चिकनी व खुरदरी सतह हाथों से महसूस करने को दी जा सकती हैं एवं समतल व असमतल सतहें भी। बिन्दु का आकार कैसा

हो इसके बारे में कोई अवधारणा विकसित करना उचित नहीं होता परन्तु बिन्दु का वजूद है जिसका हम एहसास कर पाते हैं। एक रेखाखंड दो बिन्दुओं को मिलाता है यानी एक रेखाखंड में दो अंत बिन्दु होते हैं। किरण में एक आद्य बिन्दु होता है जहाँ से किरण प्रारम्भ होती है। किरण एक बिन्दु से आरम्भ होकर किसी एक दिशा में बिना किसी अंत के आगे बढ़ती जाती है। रेखा में न कोई प्रारम्भिक बिन्दु है और न ही कोई अंत बिन्दु। तीन सरल रेखाओं से घिरी बंद आकृतियाँ त्रिभुज कहलाती हैं। त्रिभुज में तीन भुजाएँ, तीन कोण एवं तीन शीर्ष होते हैं। चार भजाओं से घिरी बंद आकृति चतुर्भुज कहलाती है। चतुर्भुज में चार भुजा, चार कोण एवं चार शीर्ष होते हैं। चतुर्भुज में आमने सामने की भुजा एवं कोण का दो जोड़ा होता है। दो आमने सामने के शीर्षों को मिलाने वाली रेखा चतुर्भुज का विकर्ण कहलाती है। पैटर्न किसी गणितीय संबंध या तर्क आधारित संबंध को दुहराने की क्रिया है। पैटर्न के लिए दो बातें आवश्यक हैं: संबंध स्थापित करना तथा लगातार दुहराना

5.11 स्वमूल्यांकन

1. ठोस आकृतियाँ समतल आकृतियों से कैसे भिन्न है? उदाहरण के साथ दिखाइए।
2. कोई वस्तु अलग–अलग तलों पर रखकर देखने पर अलग–अलग क्यों दिखती हैं?
3. रेखा को परिभाषित करना क्यों मुश्किल है? अपने उत्तर के समर्थन में पर्याप्त तर्क दें।
4. आप अपनी कक्षा में बच्चों के बीच बिन्दु, रेखा, किरण एवं रेखाखंड की अवधारणा कैसे विकसित करेंगे।
5. कोण के कितने प्रकार हैं? सभी प्रकारों का वर्णन करते हुए प्रकृति से जुड़ा एक उदाहरण भी दें।
6. त्रिभुज की अवधारणा स्पष्ट करने हेतु आप कक्षा में कौन–सी गतिविधि करेंगे।
7. चतुर्भुज के प्रकारों को स्पष्ट करने हेतु आप कक्षा में कौन–सी गतिविधि करेंगे?
8. पैटर्न से आपका क्या अभिप्राय है। बच्चे के गणितीयकरण के लिए पैर्टन को आप कितना महत्वपूर्ण मानते हैं?
9. अपने आस–पास की वस्तुओं में दिखाई पड़ने वाले ज्यामितीय आकृतियों के संदर्भ में अपने साथियों से बातचात कर सूचीकरण करें तथा समतल एवं ठोस आकृतियों के आधार पर उनका वर्गीकरण करें।
10. अपने घर से विद्यालय तक जाने का एक नक्शा तैयार कीजिए। उसमें आपने किन–किन प्रतीको एवं चिह्नों का प्रयोग किया है, उस पर चर्चा कीजिए तथा उनका सूचीकरण कीजिए।

इकाई–6
मापन एवं आँकड़े

6.1 परिचय
6.2 सीखने की योजना
6.3 मापन का अर्थ
6.4 साईज (आकार) का अनुमान :
6.5 लम्बाई का मापन
6.6 मापन और अनुमान
6.7 अमानक एवं मानक इकाइयाँ
- 6.7.1 अमानक इकाईयाँ :
- 6.7.2 मानक इकाईयाँ :
- 6.7.3 लम्बाई मापन के साधन का चुनाव
- 6.7.4 मापन के दौरान होनेवाली गलतियां

6.8 क्षेत्रफल
- 6.8.1 क्षेत्रफल का अर्थ

6.9 आयतन
- 6.9.1 आयतन की समझ
- 6.9.2 आयतन का संरक्षण
- 6.9.3 आयतन की इकाई

6.10 धारिता
6.11 समय का माप
- 6.11.1 कल, आज और कल
- 6.11.2 क्षण और समयावधि
- 6.11.3 दिन, सप्ताह, महीने और वर्ष
- 6.11.4 घड़ी में समय
- 6.11.5 समय में सक्रियाएँ

6.12 आँकड़ों का प्रत्यय तथा प्रस्तुतीकरण
6.13 सारां"ा
6.14 स्वमूल्यांकन

6.1 परिचय

गणना, मापन एवं आँकड़े संबंधी गणितीय समस्याओं का सामना हमें प्रतिदिन करना पड़ता है। मापन गणित का एक ऐसा क्षेत्र है जिसकी आवश्यकता हमें कदम–कदम पर पड़ती है। घड़ी में समय देखना हो या डेयरी अथवा दुकान से दूध लाना हो या मोटर–साइकिल या कार में डीजल या पेट्रोल भरवाना हो या बाज़ार में कपड़े खरीदना हो या एक स्थान से दूसरे स्थान के बीच की दूरी का अनुमान लगाना हो या दूरी सटीकता के साथ ज्ञात करना हो, घर में चाय बनाने के लिए दूध, पानी, चीनी की मात्रा का निर्धारण करना हो या घर मकान बनाने के लिए नक्शा बनाना और क्षेत्रफल ज्ञात करना हो और इसे बनाने के लिए आवश्यक सामग्रियों का अनुमान लगाना हो, इन सब कार्यों में हमें मापन की आवश्यकता पड़ती है और इसी प्रकार के अन्य बहुत से कार्यों में मापन का उपयोग हम करते हैं।

वास्तव में किसी वस्तु को मात्रात्मक रूप में व्यक्त करना मापन कहलाता है। किसी वस्तु की ख़रीददारी करते समय हम एक निश्चित मात्रा में वस्तु खरीदते हैं, जो वस्तु के मापन के बिना संभव नहीं है। इसी प्रकार समय का मापन की भी हमें आवश्यकता पड़ती है जैसे–किसी कार्य को पूरा करने में कितना समय लगेगा या किसी व्यक्ति ने कितने समय तक कार्य किया या किसी की आयु बताना हो तो हमें व्यतीत हुए समय की मात्रा का निर्धारित करना होता है अर्थात हमें समय की माप की आवश्यकता पड़ती है। एक और महत्वपूर्ण चीज का हम मापन करते हैं वह है मुद्रा या राशि। खरीदी हुई वस्तु की मात्रा के बदले में एक निश्चित राशि का भुगतान हम करते हैं अर्थात मुद्रा का भी निर्धारण या मापन किया जाता है। वस्तु की लंबाई, वजन, आयतन या क्षेत्रफल का आकलन करना हो, मुद्रा या समय का निर्धारण करना हो ये सभी किसी न किसी रूप में एक दूसरे से जुड़े हुए होते हैं जैसे– विद्यालय में दौड़ प्रतियोगिता का आयोजन किया जा रहा हो तो दौड़ की लंबाई का मापन और समय का मापन साथ–साथ करना होता है या वस्तु खरीदते समय वजन और उसके अनुरूप वस्तु की कीमत का मापन साथ साथ करना होता है। मापन हमारे गणितीय सोच को बढ़ावा देता है तथा गणितीय ढंग से समस्याओं का समाधान ढूँढने के लिए प्रेरित करता है। मापन की हमारे जीवन में उपयोगिता एवं महत्व को देखते हुंये प्राथमिक स्तर से ही मापन की प्रक्रियात्मक और अवधारणात्मक पक्षों से बच्चों का परिचय कराना आवश्यक है।

बच्चों में मापन की गणितीय अवधारणा की समझ विकसित करना तथा मापन की अवधारणाओं का दैनिक जीवन के कार्यों को पूर्ण करने के लिए सटीकता के साथ उपयोग करने के लिए आवश्यक कौशलों का विकास करना अत्यंत महत्वपूर्ण हो जाता है। इस इकाई में मापन और मापन से जुड़े विभिन्न अवधारणाओं तथा मानक और अमानक मापन विधियों, उपकरणों के बारे में तथा मानक और अमानक मापन इकाईयों में भिन्नताओं के बारे में चर्चा की गई है। साथ लंबाई, भार, मुद्रा, धारिता एवं समय व क्षेत्र की माप की अवधारणात्मक एवं प्रक्रियात्मक पहलुओं की समझ विकसित करना तथा आँकड़ों की अवधारणा समझ तथा उनके प्रस्तुतीकरण के विभिन्न तरीकों से परिचित कराया जाएगा।

6.2 सीखने के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप :

- मापन का अर्थ एवं आव”यकता की व्याख्या कर सकेंगे।
- अमानक एवं मानक इकाइयों की समझ तथा उनके उपयोग से लंबाई, धारिता, आयतन, मुद्रा एवं समय की गणना करने में सक्षम हो सकेंगे।
- आँकड़ों के प्रत्यय का वर्णन कर सकेंगे तथा उनका प्रस्तुतीकरण कर सकेंगे।

6.3 मापन का अर्थ

मापन एक ऐसा हुनर है जो हर व्यक्ति के जीवन में जरूरी होता है। मापन को जानने के लिए हमें तीन बातों को समझना जरूरी है जो कि एक पूर्व अनुभव की तरह होती है– संक्रमिता, संरक्षण व इकाई के सिद्धान्त। जब तीन वस्तुएँ दी गयी हो– A, B तथा C जिसमें A, B से बड़ा हो तथा B, C से बड़ा हो, तो A, C से भी बड़ा होगा। हमने A व C के मध्य का संबंध, इनके B के साथ संबंध के आधार पर किया। इस तरह की तुलना संक्रामिता के सिद्धान्त में मुख्य भाग अदा करती है। इसी तरह एक बड़े गिलास में भरे की मात्रा दो छोटे गिलासों में डालने पर नहीं बदलती है तथा इसी तरह एक काग़ज़ का पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके दो टुकड़ों के पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है। इससे हमें संरक्षण के सिद्धान्त के बारे में पता चलता है। जब किसी मात्रा जैसे– लम्बाई, भार, आयतन आदि का मापन किया जाता है तो इसकी एक अन्तर्राष्ट्रीय इकाई होती है जोकि हर जगह मान्य हो। जैसे– पानी की मात्रा को लीटर में नापा जाता है तथा यह इकाई दुनिया में हर जगह मान्य होती है।

बच्चों के मापन को जानने व समझने के दो पायदान होते हैं–

1. मापन को जानने का बच्चों का पूर्ण अनुभव हो जो कि उन्हें मापन के विभिन्न क्षेत्रों की अवधारणा समझा सकें।
2. बच्चों को इकाइयों की सहायता से मापन के विभिन्न क्षेत्रों को व्यक्त करना आना चाहिए।

6.4 साईज (आकार) का अनुमान :

बच्चों को विभिन्न चीजों के लिए साइज (आकार) की अवधारणा की समझ भी एक महत्वपूर्ण बात है। ज्यादातर हम यही देखते हैं कि बच्चों का शुरूआती जुड़ाव तीन विमा वाली वस्तुओं के साथ होता है। जैसे :

त्रिविमाओं की चीजों की तुलना, उनके 2–विमाओं वाले चित्रण से करने पर बच्चे विभिन्न 2–विमीय आकृतियों व इनके गुणधर्मों से परिचित हो जाते हैं। ब्लैकबोर्ड, डस्टर, किताब, तार, छड़ी, कागज़, चौकोर डिब्बा, अलमारी, बेलनाकार डिब्बे आदि चीजों के उनकी विमाओं के अनुसार तीन समूहों में बाँटने जैसी गतिविधियों से बच्चों को यह समझने में मदद मिलती है कि एक विमीय चीजों के साथ केवल एक संख्या, लम्बाइ जुड़ी होती है, जबकि दो–विमीय चीजों के साथ लम्बाई व चौड़ाई होती है और तीन विमीय चीजों के साथ लम्बाई चौड़ाई व ऊँचाई तीनों जुड़ी होती है।

अतः विभिन्न वस्तुओं को उनकी विमाओं के आधार पर अलग–अलग समूहों में बाँट कर उनसे संबंधित, लंबाई, चौड़ाई एवं उँचाई के मापन संबंधी समझ विकसित करनी चाहिए। सामान्य बच्चे एक आकृति वाली चीजों जैसे– पेन, पेंसिल, किताब, कॉपी आदि की साइज की तुलना तो कर लेते हैं किन्तु अलग–अलग आकृति या विमाओं वालाी चीजों के बीच तुलना करना उनके लिए थोड़ा मुश्किल लगता है। इसके लिए हम अलग–अलग आकृति वाली चीजों के बीच तुलना करने के लिए एक को दूसरे पर ढक कर, उनमें द्रव भर कर उनकी लंबाई, मोटाई आदि की तुलना कर सकते हैं।

आपके अनुसार क्या 9 वर्ष की कोई बच्ची 2 मीटर ऊपर लगे आम को तोड़ने के लिए कितनी बड़ी ड़डी चाहिए? क्या 1 किलोग्राम दूध लाने के लिए सही बर्तन का चुनाव कर पाएगी? क्या वह अपना खिलौना पैक करने के लिए सही साइज (आकार) का डिब्बा चुन पाएगी? इन सारी क्रियाओं में साइज की अवधारणा आती है।

एक बच्ची शायद दो पेंसिलों में से बड़ी वाली पेंसिल या दो पत्थरों में से ज़्यादा वजनी पत्थर का पता लगा ले। परन्तु ऐसी दो चीजों की तुलना करने में कठिनाई होगी किसकी आकृति अलग–अलग हो या जो एक से ज़्यादा विमीय हो।

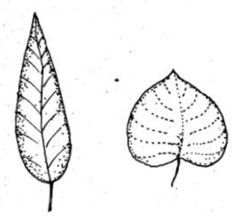
दैनिक जीवन में बच्चे बड़ी, छोटी, लम्बी, मोटी, पतली, दुबली, भारी आदि शब्दों का इस्तेमाल चीज़ों की विशेषता बताने के लिए करते हैं।

अगर कोई दो छड़े चित्र–1 जैसी स्थिति में रखी है तो वे बता देंगे कि दोनों बराबर है परन्तु चित्र–2 जैसी स्थिति में रखे तो शायद वह गलत उत्तर दें।

चित्र–1

चित्र–2

करके देखिए : दो पत्तियाँ लिजिए। एक पत्ती ज्यादा लम्बी व दूसरी ज्यादा चौड़ी हो।



बच्चों से पूछिए कि कौन–सी पत्ती ज़्यादा बड़ी है। आमतौर पर बच्चे ज़्यादा लम्बी पत्ती को बड़ी बताते हैं। परन्तु आप लम्बी पत्ती को चौड़ी पत्ती पर रखकर, अतिरिक्त हिस्सा काट ले। अब काटे हुए हिस्से को चौड़ी पत्ती के खुले हिस्से पर फैलाकर दिखा सकते हैं। यदि इस तरह करने पर चौड़ी पत्ती पूरी तरह ढ़क जाए और लम्बी पत्ती का कुछ हिस्सा फिर भी शेष रहे तो लम्बी पत्ती ज़्यादा बड़ी है। परन्तु यदि चौड़ी पत्ती का कुछ हिस्सा खुला ही रह जाए तो चौड़ी पत्ती ज़्यादा बड़ी है। इससे उन्हें क्षेत्रफल की अवधारणा का औपचारिक रूप में परिचय कराए बगैर ही कुछ अंदाजा हो जाएगा।

करके देखिए :

अलग–अलग आकार के काँच के बर्तन लीजिए और बच्चों से पूछिए कि कौन ज्यादा **बड़ा** है? बच्चों से ऐसे प्रश्न पूछने पर वे भ्रमित हो जाते हैं। यदि वे न बता सके तो किसी एक बच्चे से एक बर्तन में पानी भरवाएँ। फिर इस पानी को दूसरे बर्तन में डालें। अगर बर्तन का पूरा पानी डालने के बाद भी दूसरे बर्तन में जगह बच जाती है तो बच्चों से बड़ा–छोटा के लिए पुनः प्रश्न करें। जैसे– किसमें ज्यादा पानी समया? किसकी धारिता ज्यादा है? आदि।

क्या साइज की तुलना करने के लिए यह सबसे उपयुक्त विधि है? इस पर विचार करें। क्या हम विभिन्न वस्तुओं की साइज की तुलना करने के निर्धारित माप वाले मापकों का उपयोग कर सकते हैं? क्या ये मापक बिल्कुल ठीक–ठीक तुलना करने के लिए सबसे उपयुक्त स्रोत हैं? विचार करें।

दो चीजों के साइज की तुलना करना मापन का पहला कदम है। साइज की तुलना कई तरीकों से की जा सकती है।

1. देखकर
2. चीजों को एक दूसरे के ऊपर रखकर (अध्यारोपण)
3. परोक्ष तरीकों से
4. गैर मानक इकाइयों के उपयोग से।

5. मानक इकाइयों के उपयोग से।

प्रारंभ में मापन हेतु हम पहले दो तरीकों का प्रयोग कर बच्चों की मापन संबंधी समझ विकसित कर सकते हैं। तत्पश्चात् गैर मानक इकाईयों का प्रयोग और अंत में मानक इकाईयों का प्रयोग कर मापन की सटीक समझ विकसित की जा सकती है।

6.5 लम्बाई का मापन

कक्षा 6 व 7 के छात्रों को गणित की प्रश्नोत्तरी प्रतियोगिता में एक सवाल पूछा गया था कि सेंटीमीटर में एक आदमी की ऊँचाई कितनी हो सकती है? रिकार्ड में जो आँकड़ा था, उसमें दशमलव बिन्दु साफ नहीं दिख रहा था। संख्या 1642 से.मी. नजर आ रही थी। दशमलव बिन्दु की सही जगह कहाँ होगी? हमें बहुत निराशा हुई कि 30 में से मात्र 1 बच्चे ने ही सही जवाब दिया था। अधिकतर बच्चों के उत्तर 16.42 से.मी. लिखा था।

एक अन्य मौके पर एक स्कूल में शिक्षक के चयन हेतु साक्षात्कार के दौरान उम्मीदवार में प्रश्न किया गया कि 'क्या आप इस कमरें की' यानि जहाँ हम बैठे हैं, सन्निकट ऊँचाई बता सकते हैं? उम्मीदवार ने दीवारों पर नजर दौड़ाई कुछ समय तक अनुमान लगाया और बोला ''लगभग 20 मीटर होगी'' सर

प्रश्न : क्या उक्त बच्चों व शिक्षक उम्मीदवार की ऊँचाई की अवधारणा की समझ थी? आपको क्या लगता है?

6.6 मापन और अनुमान

मापन में अनुमान की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। अनुमान वह प्रक्रिया है जिसके जरिए, वगैर किसी उपकरण/कागज़ पेंसिल पर परिकलन किए, एक सन्निकट उत्तर हांसलि किया जाता है। इसके जरिए नाप की त्रुटियों को पहचानकर दूर भी किया जा सकता है बशर्तें कि बच्चे के पास इतना अनुमान का हुनर हो कि वह इस प्रश्न का उत्तर खोज लें कि 'क्या मेरा उत्तर उचित है?'

अनुमान एक तरह से मापन ही है जो दिमागी ढ़ग से किया जाता है किसी जानी–पहचानी मानक या गैर मानक इकाई के संदर्भ में।

किसी चीज को नापने से पहले बच्चों को उसकी लम्बाई का अनुमान लगाने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। तभी वे मापन में प्राप्त संख्या का अर्थ देख पाएंगे। यदि कोई बच्ची गलती से मीटर स्केल को उल्टा पकड़कर डिब्बे की लम्बाई नापने लगे जो 37 से.मी. ऊँची है, तो होगा यह कि वह 60 से. मी. का अंक पढ़कर आगे गिनने लगेगी। अगर यदि उसने नापने से पहले अनुमान लगाया है कि डिब्बा लगभग 40 से.मी. ऊँचा है तो वह शायद अपने मापन की जाँच करके गलती पकड़ लेगी।

जरा सोचे : क्या आप खम्भे या किसी कमरे की ऊँचाई का अनुमान लगा सकते हैं? दो उदाहरण दीजिए कि कैसे साइज का अनुमान लगाने की क्षमता उपयोगी है?

6.7 अमानक एवं मानक इकाइयाँ

6.7.1 अमानक इकाईयाँ :

हम हमेशा मापन की मानक इकाइयों का इस्तेमाल नहीं करते। मानक इकाइयों का उपयोग करना इस बात पर निर्भर है कि उस कार्य–विशेष में कितनी सरीकता की जरूरत है। आपने भी अपने अनुभव से बहुत कुछ मापा होगा।

जैसे बच्चे कीत्–कीत् के खेल में कदम या पैर से नापकर घर बनाते हैं। किसान अपने खेतों में प्रायः कदम, बित्ता, पैर, हाथ से नापकर क्या बनाते है। यों तो बच्चे गै–मानक इकाइयों का प्रयोग करते हैं मगर उन्हें पता नहीं होता कि वे ऐसा कर रहे हैं। हम उनके सामने वास्तविक जीवन की विभिन्न स्थिति रख सकते हैं, जहाँ मापन की जरूरत पड़े।

- आप मापन के किन–किन तरीकों को जानते हैं?
- आपके विद्यार्थी मापन की किस शब्दावली का इस्तेमाल करते हैं?

अगर हम बच्चों से पूछें की यह रस्सी कपड़े सुखाने के लिए छत पर तानी गई थी किन्तु अब यह इतनी कमजोर हो गई है कि टूट सकती है।

अगर इस पुराने रस्सी की जगह नई रस्सी लानी है तो क्या करें? बच्चों के संभावित उत्तरों में निम्नांकित उत्तर शामिल हों सकते हैं :–

- मैं पुरानी रस्सी के बराबर नई रस्सी माप लूँगा।
- मैं अपने बित्ते से रस्सी को नाप कर उतनी ही बित्ते की नई रस्सी लूँगा।
- मैं धागे से पुरानी रस्सी माप कर नई रस्सी लाउँगा।
- मैं एक छड़ी या डण्डे से पुरानी रस्सी को माप कर प्राप्त डंडो की संख्या का पता करूँगा एवं उतने डंडो की माप के बराबर नई रस्सी लाउँगा।
- मैं पुरानी रस्सी को हाथ से या कदम से नाप कर उतने ही हाथ या कदम के बराबर नई रस्सी ले आउँगा।

इन उत्तरों से यह पता चलता है कि बच्चे मापन के लिए कई तरह की इकाइयों का प्रयोग करते हैं। फिर भी उन्हें विभिन्न भौतिक इकाइयों का इस्तेमाल करने के अभ्यास की जरूरत है, जिससे कि वह सही माप सकें। बच्चे ऐसी इकाइयों का उपयोग करते हैं जिन्हें देखा, छुआ व गिना जा सकता है। ये माचिस की डिब्बी, पेसिंल, डंडी, क्रेयान आदि हो सकते हैं।

जैसे–

- किसान धूप व उससे बन रही परछाईं से समय का अंदाजा लगा लेता है कि थोड़ी देर बाद 6 बज जाऐंगे और घर जाने का समय हो जाएगा।
- कपड़े सूखाने के लिए छत के एक कोने से दूसरे कोने तक कितनी लंबाई की रस्सी चाहिए, गृहिणी यह अनुमान लगाकर दुकानदार से रस्सी खरीदती है।

चूँकि मापन के लिए अक्सर अनुमान लगाना होता है अतः इस क्षमता को बेहतर करने व मापन का अभिप्राय समझने के लिए अनुमान लगाने के अवसर देने चाहिए। यथा–

- मेज को ढकने के लिए कितनी माचिस की डिब्बी चाहिए?
- एक बाल्टी में से कितने गिलास पानी भरेंगे?
- आपके मकान की ऊँचाई कितनी है?

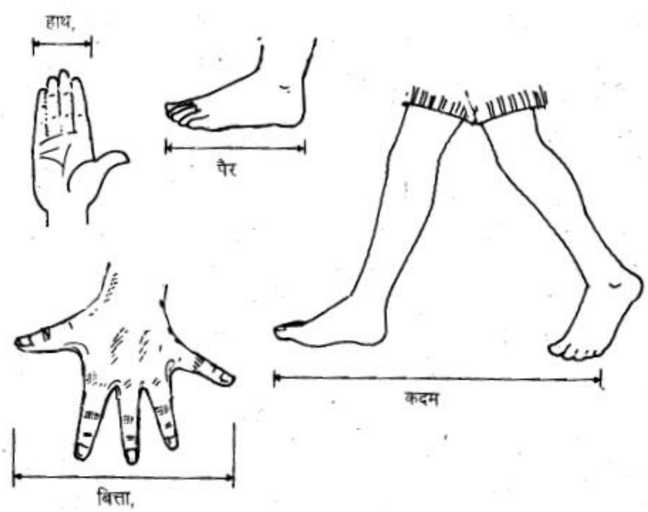
- पोस्ट कार्ड की लंबाई कितनी है?
- कक्षा के श्यामपट्ट को ढकने के लिए कितनी कॉपियों की जरूरत होगी?

गतिविधि 2 :

बच्चों को विभिन्न भौतिक इकाईयों जैसे डण्डा, माचिस की डिब्बी, पेंसिल, गिल्ली इत्यादि की सहायता से वर्ग कक्ष, मेज, श्यामपट बेंच आदि की माप कराएँ।

आप बच्चों को दैनिक जीवन से जुड़ी निम्नांकित अंगिक इकाइयों को भी मापक रूप में बता सकते हैं :

लंबाई मापन में : अंगुली, बालिश्त/बित्ता, हाथ, कदम, पाँव, बाँह इत्यादि।



गहराई मापन में :

घुटने तक गहरा, टखने तक, कमर तक, गले तक, सिर से उपर इत्यादि।

मात्रा एवं आयतन में :

चुटकी भर, मुट्ठी भर, हथेली भर आदि।

चुकि उपर्युक्त भौतिक इकाईयाँ माप लेने वाले व्यक्ति पर निर्भर है। अर्थात् अलग–अलग व्यक्ति द्वारा उपयोग में लाए गए डण्डे, गिल्ली, पेंसिल, बित्ता, कदम, हाथ आदि की माप अलग–अलग हो सकती है अतः ऐसी चीजों के माध्यम से हम बच्चों में अमानक इकाईयों की अवधारणा स्पष्ट कर सकते हैं।

प्रश्न : शुरूआत में गैर मानक इकाइयों से नापने में बच्चों को किस तरह की मदद मिलती है?

इन गैर मानक इकाइयों से नापने का अभ्यास बच्चों के लिए कई तरह से मददगार होता है–

(i) इकाई में नापने की बात से बच्चों का परिचय सीधे ही सेंटीमीटर जैसी चीज़ के जरिए न होकर, जानी पहचानी चीज़ों के माध्यम से होता है।

(ii) मापन की शुरूआती कार्य में गैर–मानक इकाइयाँ ज्यादा उपयुक्त होती है 1 से.मी. बहुत छोटा होता है तो मेज नापते वक्त या दोस्त का कद नापते वक्त उनके हिसाब से से.मी. की संख्या बहुत ज्यादा हो जाए। और इसी काम के लिए मीटर बहुत बड़ी इकाई है।

(iii) इन अनुभव से बच्चों को यह गुजाइंश भी नजर आएगी कि जब मानक पैमाना न हो या अनुपयुक्त हो तब किसी खास काम के लिए पैमाने भी बनाए जा सकते है।

(iv) गैर–मानक इकाई के जरिए बच्चे मानक इकाई की जरूरत महसूस कर पाएंगे जैसे– वे यह देखेंगे कि जब वे बेंच बित्ते से नापते हैं तो लम्बाई 10 बित्ता आती है और जब शिक्षक नापते है तो उसी बेंच की लम्बाई 8 बित्ता रह जाती है।

प्रश्न : आप बच्चों को कैसे यकीन दिलायेंगे कि लम्बाई नापने में गैर–मानक इकाइयाँ अपर्याप्त है?

यदि सारे बच्चे कई चीज़ों की लम्बाई बित्ते/कदम से नापे तो शायद उन्हें इस निष्कर्ष पर पहुँचने में मदद मिलेंगी कि एक ही चीज़ को अलग–अलग व्यक्ति नापे तो ये इकाइयाँ अलग–अलग लम्बाई बताती है।

6.7.2 मानक इकाईयाँ :

बच्चों को मानक इकाईयों की धारणा से तब अवगत कराना चाहिए जब वे उसकी आवश्यकता महसूस करें। यदि शिक्षक पहले ही झटके में ब्लैकबोर्ड पर एक रेखाखण्ड खींचकर उसकी लम्बाई स्केल से नाप दे तो बच्चे यह समझ ही नहीं पाते कि सेंटीमीटर को मानक इकाई क्यों कहते हैं? इस संदर्भ में मैं आपको एक तरीका बताना चाहुँगी जो मेरी दोस्त मंजु ने अपनाया।

उदाहरण :

एक बार श्रीमती मंजू ने बाजार से खरीदी गई नई साड़ी को अपने बच्चो आदित्य, आकृति तथा अन्या से अलग–अलग मापने के लिए कहा। तीनों ने बारी–बारी से अपनी बाँह से साड़ी मापी।

आदित्य : इस साड़ी की माप 10 बाँह है।

आकृति : 9 बाँह

अन्या : $7\frac{1}{2}$ बाँह

श्रीमती मंजू ने बच्चों से माप में अंतर आने का कारण पूछा तो बच्चों ने बताया कि उनकी बाँहों की लंबाई छोटी–बड़ी है जिससे माप में अंतर आया।

आकृति : तो फिर हम किससे मापे?

श्रीमती मंजू : मीटर स्केल एक ऐसा पैमाना है जिससे चाहे कोई भी मापे तो माप सदैव समान ही आता है। क्या हम मीटर स्केल को मानक मापक मान सकते हैं ?

हम ऐसी स्थितियों का उपयोग कर के मानक इकाई की धारणा बच्चों में ला सकते हैं। इसी प्रकार हमें अलग–अलग विमाओं वाली वस्तुओं की मापन क्रिया में प्रयुक्त होने वाली मापन की मानक इकाईयों की व्याख्या करनी चाहिए।

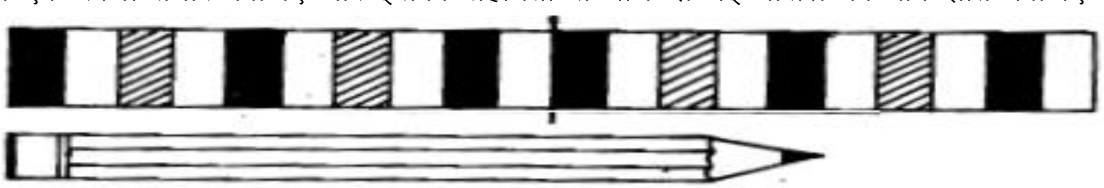
गतिविधि :

चार बच्चों से सारणी में लिखी चीजों की लंबाई माप बित्ते और स्केल की सहायता से मापने को कहे और परिणाम पर चर्चा कीजिए :–

क्रम सं०	मापी जाने वाली चीज का नाम	पहला बच्चा		दूसरा बच्चा		तीसरा बच्चा		चौथा बच्चा	
		बित्ते की माप	स्केल की माप	बित्ते की माप	स्केल की माप	बित्ते की माप	स्केल की माप	बित्ते की माप	स्केल की माप
1	श्याम पट्ट								
2	गणित की पुस्तक								
3	कक्षा–कक्ष की कोई एक खिड़की								
4	कक्षा–कक्ष की कोई एक बेंच								
5	किसी एक बच्चे का स्कूल बैग								

गतिविधि :

कार्ड बोर्ड की एक पट्टी या कोई डण्डी लीजिए। 1–1 से० मी० के 15 भाग बाँटकर 15 से० मी० का एक स्केल तैयार कीजिए और इसकी सहायता से नीचे दी गई पेंसिल की माप ज्ञात कीजिए :–



प्रश्न : मापन की मानक इकाईयों की क्या आवश्यकता है?

प्रश्न : मानक तथा अमानक इकाईयों के कोई तीन अंतर बताइए।

प्रश्न : बच्चों या उनके माता–पिता द्वारा रोजमर्रा के कार्यों में अमानक इकाईयों का उपयोग होता है। उनके अमानक इकाईयों के उपयोग के पूर्व ज्ञान के आधार पर मानक इकाईयों के उपयोग की धारणा बताने के लिए कोई एक गतिविधि सुझाइए।

प्रश्न : साइज/आकार के अनुमान की क्षमता के लाभ को दो उदाहरणों द्वारा समझाइये।

गतिविधि :

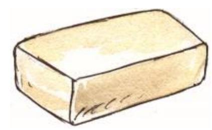
आप कक्षा–3 के अध्याय: 8 की पहली गतिविधि (श्यामपट और मेज को पहले बित्ते से नापना फिर एक डंडी से नापना) करवाएँ। क्या इस गतिविधि को कराने के बाद बच्चे खुद मानक इकाई की जरूरत महसूस करते हैं?

मीटर लम्बाई मापने की मानक इकाई है। शुरूआत में इसकी उप इकाई सेन्टीमीटर से नापने का मौका बच्चों को देना चाहिए।

क्रियाकलाप :

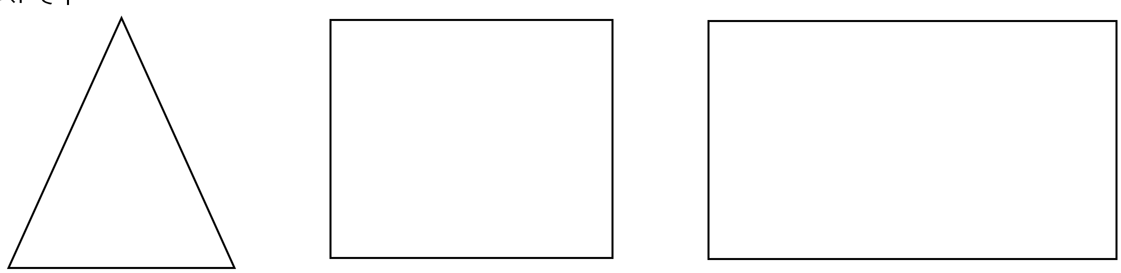
प्रत्येक बच्चा एक कार्ड बोर्ड की पट्टी लें और उसे 1–1 से० मी० के 10 भागों में बाँटे। हर भाग को अलग–अलग रंग से रंग दें। इस स्केल पर कोई अंक नहीं लिखें हैं। शिक्षक बच्चों को बता सकते हैं कि एक रंगीन भाग की दूरी को 1 सेंटीमीटर कहते हैं।

शुरू में बच्चों को ऐसी चीजों की लम्बाई नापने को कहें, जिसकी लम्बाई 10 सेंटीमीटर से छोटी हो इसके लिए वे स्केल को उस चीज से सटाकर रखें और गिन लें कि स्केल के कितने रंगीन भाग उस चीज से सटे हैं।



चित्र : रबड़ 3 से० मी० लम्बा है।

बच्चे अपनी बनाई इस स्केल का उपयोग पुस्तक के विभिन्न ज्यामितिय आकृतियों को मापने में भी कर सकते हैं।



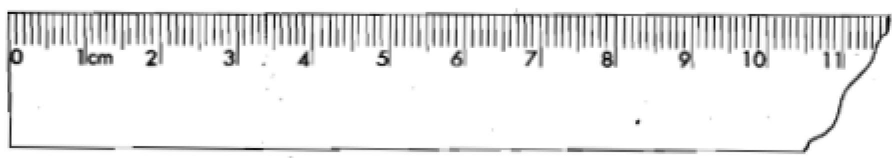
जब बच्चे पुस्तक के ज्यामितिय आकृतियों को माप रहे होते हैं, तब उसे पुस्तक की लम्बाई नापने के लिए प्रेरित किया जा सकता है। बच्चे स्वतः सोच पाते हैं कि 10 से० मी० से लम्बी चीजें कैसे मापें ? तब उसे आसपास की कई चीजे, जैसे पेंसिल बॉक्स, कुर्सी, टेबल, श्यामपट आदि को मापने के लिए कह सकते हैं। साथ हीं तालिका के अनुसार अपना अनुमान और नाप व अन्तर लिखें।

चीजों का नाम	टनुमान	नाप	अन्तर
किताब			
पेन्सिल			
कुर्सी			
बेंच			
श्यामपट			

प्रश्न : इस गतिविधि को कक्षा–4 के बच्चों के साथ करके देखिए कि आपकी क्या प्रत्युत्तर मिलता है।

जब बच्चे अपनी बनाई 10 से० मी० लम्बी स्केल के इस्तेमाल का काफी अनुभव हासिल कर लें तब 15 से० मी० वाले स्केल से भी मापने का मौका दें। साथ ही साथ स्केल को दिखाते हुए चर्चा भी किया जा सकता है। इस पर 0 से 15 संख्याएँ लिखी हुई है। यह सेन्टीमीटर वाला हिस्सा कहलाता है इसे संक्षेप में सेमी० लिखते हैं। इसमें 0 से 1 के बीच की दूरी 1 से 2 के बीच की दूरी सभी 1 सेमी० के बराबर है।

सभी 1 सेमी० का अन्तराल 10 छोटे–छोटे भाग में विभाजित है, प्रत्येक छोटे विभाजन को 1 मिलीमीटर कहते हैं। इसके अनुभव हासिल करने का मौका बच्चों को दें।



जब बच्चे सेन्टीमीटर और मिलीमीटर के इस्तेमाल का काफी अनुभव प्राप्त कर ले तब छड़/सीधी छड़ी या विद्यालय परिवेश में उपलब्ध सीधी–लम्बी वस्तु से मीटर स्केल बच्चों द्वारा बनवाएँ। ध्यान दें कि मीटर स्केल बनाने में बच्चे 10 सेमी० वाले स्केल का प्रयोग करें। अब बच्चों को ऐसी गतिविधियों को करने के लिए प्रेरित करें जिससे 1 मीटर लम्बाई का अहसास होने में मदद मिले।

प्रश्न : आप एक मीटर स्केल कैसे बनाएंगे?

प्रश्न : बच्चों को रूढिगत स्केल इस्तेमाल करने से पहले इस तरह बनाई गई स्केल का इस्तेमाल करना उपयोगी है या नहीं? क्यों?

प्रश्न : आप कोई ऐसी गतिविधि बनाइए जिससे बच्चा, मीटर स्केल का उपयोग किए बगैर, एक मीटर लम्बाई नाप सके?

1. इसी प्रकार श्यामपट पर 1 मीटर लम्बा लकीर खींच दें और सभी बच्चे को बित्ते से नापने का मौका दें।
2. जमीन पर एक मीटर की लम्बाई का निशान खींचकर, पैर से नापने का मौका प्रत्येक बच्चे को दें।
3. बच्चों को 1 मीटर की कूद कूदने को कहिए–पहले निशान लगाकर और फिर बगैर निशान लगाए। क्या आप मानते हैं। कि 1 मीटर का अहसास होने के बाद ही बच्चा एक से अधिक मीटर का अनुमान लगा सकता है ?

बच्चें मीटर/सेन्टीमीटर का अनुमान लगा पायें, इसके लिए प्रश्न का भी सहारा लिया जा सकता है।

उदाहरण के लिए :

1) सीता जमीन से 3 मीटर ऊपर बैठी हुई थी, क्या वह –
   - क) स्टूल पर बैठी हुई थी।
   - ख) अपनी झोपड़ी का छप्पर ठीक कर रही थी।
   - ग) टांगे पर बैठी थी।

2) निम्नलिखित चीजों में से कौन सी चीज 1 सेमी० से कम लम्बाई की होंगी।
   - क) माचिस की तीलीं ख) जीरा
   - ग) टूथब्रश घ) किताब

क्रियाकलाप :

विद्यालय परिवेश के कमरे, बरामदे, मैदान, बगीचे की लम्बाई मीटर स्केल से नापने के लिए बच्चों को दें। नापने के क्रम में अन्त में जो अतिरिक्त लम्बाई बचे, जो मीटर स्केल से कम हो, उसे छोड़ा जा सकता है। बच्चे लम्बाई को निम्न तालिका में लिखें।

चीज का नाम	अनुमान से लम्बाई	लम्बाई कितने मीटर से ज्यादा है।	लम्बाई कितने मीटर के कम है।	लम्बाई कितने मीटर है।
कमरा बरामदा मैदान				

बच्चे के मन में यह सवाल आना स्वाभिविक है कि यदि उसके पास सिर्फ एक मीटर की स्केल हो, तो एक मीटर से कम या एक मीटर से थोड़ी ज्यादा लम्बाई कैसे मापेंगे?

ऐसी स्थिति में बच्चों के सामने वास्तविक जीवन की कोई ऐसी स्थिति रखनी होगी, जहाँ से एक मीटर से कम या एक मीटर से थोड़ी ज्यादा लम्बाई मापनी हो। क्या विद्यालय परिवेश में ऐसे अनेक वस्तु हो सकते हैं, जिसकी लम्बाई मापने में ऐसी छोटी इकाई की जरूरत महसूस हो?

इस मौके पर बच्चों के सामने दर्जी का फीता रखा जा सकता है, जो एक मीटर से ज्यादा लम्बी है। इसमें निशान सेंटीमीटर में होते हैं तथा इसके उपयोग से किसी भी चीज की लम्बाई नापी जा सकती है, चाहे वह लम्बाई 1 मीटर से कम हो या 1 मीटर से ज्यादा हो।

6.7.3 लम्बाई मापन के साधन का चुनाव :

लम्बाई मापन के लिए इंची टेप, एक मीटर स्केल, 30 से० मी० स्केल, 15 से० मी० स्केल आदि उपलब्ध होते हैं। किस कार्य के लिए कौन से स्केल उपयुक्त होगा बच्चों को इसकी समझ होनी चाहिए। इस संदर्भ में निम्नलिखित गतिविधि मददगार हो सकती है।

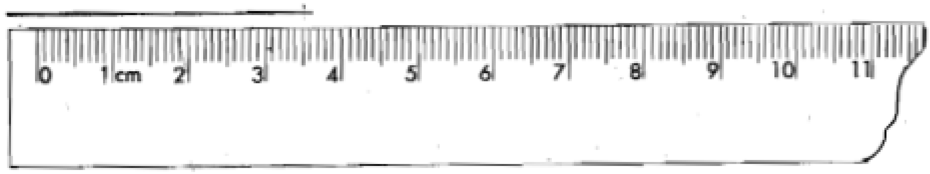
गतिविधि :

बच्चों को समूहों में बाँट दीजिए। हर समूह को एक इंची टेप, एक मीटर स्केल, एक 30 से० मी० स्केल और 15 से० मी० की स्केल दे दीजिए। प्रत्येक समूह विद्यालय में उपलब्ध चीजों को नापें और तय करें कि कौन सी स्केल उपयुक्त रही और क्यों ? अपनी नाप और उपयुक्त स्केल निम्न सारणी में भरें।

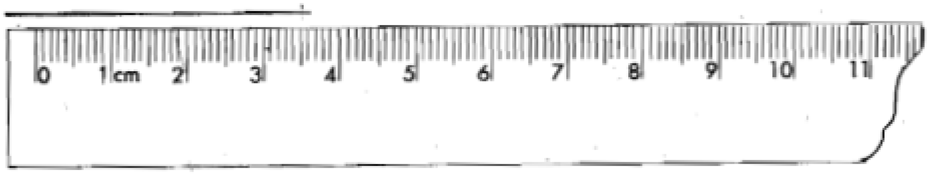
चीज का नाम	लम्बाई	उपयुक्त स्केल
कापी पेंसिल बरामदा खंभे की मोटाई		

स्केल के उपयोग में गलतियाँ :

बच्चे अक्सर स्केलों का उपयोग करते वक्त गलतियाँ करते हैं। वे स्केल के एक सिरे को चीज के सिरे की सीध में रख लेते हैं और ध्यान नहीं रखते कि स्केल पर शून्य का निशान कहाँ है।

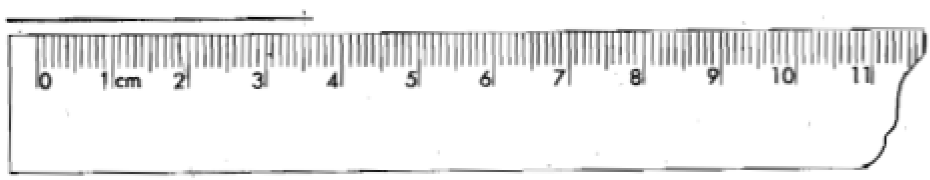


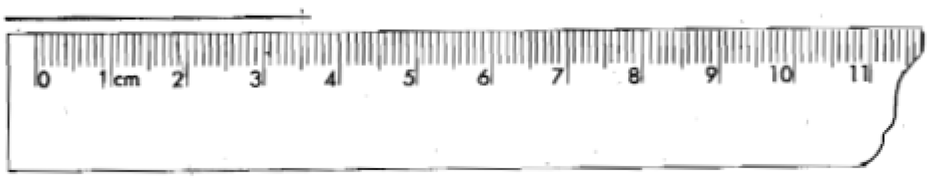
दूसरी ओर कई बच्चे रेखाखण्ड के सिरे को स्केल पर लगे '।' के निशान की सीध में रखते हैं और दूसरे सिरे के नाप को ले लेते हैं।

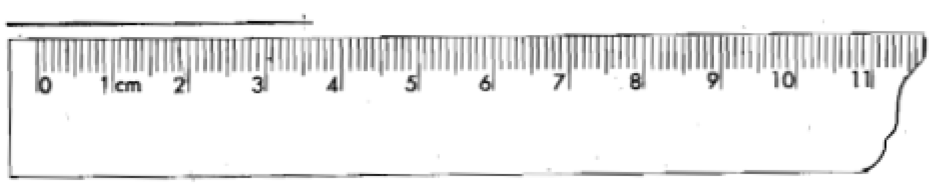


नतीजा यह होता है कि उनका परिणाम वास्तविक लम्बाई से 1 सेमी० ज्यादा आता है। इसलिए स्केल को सही–सही रखने की समझ आवश्यक है। हमें सिखाते वक्त यह ध्यान देना होगा कि बच्चे खुद स्केल का इस्तेमाल करें और हम इस्तेमाल का तरीका बतायें। क्योंकि किसी को नापते देखने से बच्चों को नापने का अनुभव नहीं मिलता।

पहले आप उन्हें यह दिखा सकते हैं कि 5 से० मी०, 6 से० मी०, 10 से० मी० वगैरह की चीजों या रेखाखण्डों की लम्बाई कैसे मापी जाती है। इसके लिए हम सारी उपलब्ध स्केलों का प्रयोग कर सकते हैं। हम उन्हें दिखा सकते हैं कि स्केल को किसी भी स्थिति में रखें, रेखाखण्ड की लम्बाई 5 से० मी०, है, तो 5 से० मी०, ही रहेगी।







इसी तरह आप उन्हें दिखाइए कि किसी रेखाखण्ड जैसे 4–5 से० मी० लम्बाई के रेखाखण्ड को नापते वक्त स्केल को कैसे पढ़ा जाता है। विभिन्न स्थितियों में स्केल को रखकर यह बात स्पष्ट कीजिए।

गतिविधि :

बच्चों को एक निश्चित लम्बाई की कागज की पट्टी काटने को कहें। फिर हर बच्चा अपनी पट्टी की तुलना अपने साथी की पट्टी से करके पता करे कि क्या लम्बाई सही मापी थी या नहीं। जब आप बच्चों के प्रदर्शन से संतुष्ट हो जाएं तो उन्हें एक निश्चित लम्बाई की रेखा बनाने या स्केल से किसी रेखाखण्ड की लम्बाई नापने को दें।

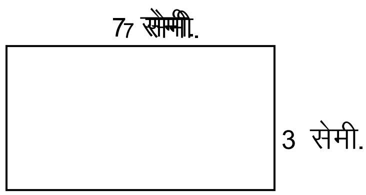
6.7.4 मापन के दौरान होने वाली गलतिया

गलत माप मिलने के कई कारण हो सकते हैं। (i) स्केल के किनारे मोटी होने से बच्चे उन्हें पढ़ते वक्त गलतियाँ करते हैं। (ii) वे स्केल को पढ़ते वक्त आँख इस बिन्दु (सिरे) के ठीक सीध में नहीं रखते। फिर भी हमें याद रखनी चाहिए कि कोई भी मापन एक दम सही नहीं होता। (iii) नाम पढ़ने में गलती। (iv) मापन यंत्र का उपयोग करने वाले व्यक्ति द्वारा नाप का सन्निकटन अपने ढंग से किया जाना। (v) नापते वक्त यंत्र रखने में गलती। (vi) एक ही यंत्र से एक ही चीज को दो व्यक्ति नापे तो भी नाप अलग–अलग आ सकते हैं?

प्रश्न : इन गललियों से निपटने के उपाय सुझाइए? लम्बाई नापने के लिए आप किस तरह की स्केल इस्तेमाल करेंगे?

6.8 क्षेत्रफल

एक बार कक्षा 5 में पढ़ने वाली मेरी भतीजी सीमा अपनी कॉपी में गृह कार्य कर रही थी। उसके अध्यापक ने उसे मापने से सम्बन्धित कुछ सूत्र लिखवाए थे। वह उसी की मदद से अपने सवाल हल कर रही थी। वह दिए गए आयत का क्षेत्रफल व परिमाप के सूत्र लगाकर हल कर रही थी। मेरी बहन ने मुझे उसका काम जाँचने को कहा। मैं सीमा के पास जाकर बैठ गई व उसके हल किए हुए सवाल देखने लगी। उसने एक सवाल इस तरह हल किया हुआ था–



परिमाप = 2 (ल. × चौ.)

= 2 (7 × 3)

= 42 सेमी.

क्षेत्रफल = ल. + चौ. = 7 + 3 = 10 सेमी.

इस सवाल को देखकर मुझे लगा कि सीमा केवल सूत्र का इस्तेमाल कर सवाल हल कर रही है परन्तु वह क्षेत्रफल व परिमाप का अर्थ नहीं समझ पायी है। अब मैंने सीमा से कुछ बात की।

मैं : क्षेत्रफल क्या होता है?

सीमा : आँ...... 2 (ल. + चौ.), नहीं शायद यह तो परिमाप होता है। ल. चौ. या....... आँ.... मुझे याद नहीं।

सीमा ने अपनी कॉपी देखी व अपने अध्यापक द्वारा लिखवाया हुआ सूत्र मुझे बता दिया।

यह बात तो साफ पता चल रही थी कि सीमा के लिए क्षेत्रफल व परिमाप का मतलब केवल एक सूत्र था जिसको वह अभी तक याद नहीं कर पाई थी।

कक्षा में हम अक्सर बच्चों को सूत्रों का उपयोग करके माप निकालना बताते हैं। ढेर सारे सूत्र बच्चों को याद करवाए (रटवाए) जाते हैं व उनका इस्तेमाल कर पुस्तक में दिए गए सवाल हल करवा दिए जाते हैं।

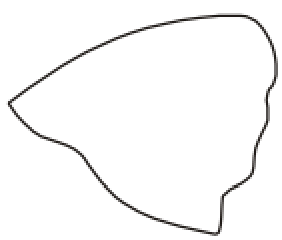
इस प्रक्रिया में बच्चे सूत्र रट तो लेते हैं पर वह यह नहीं समझ पाते कि सूत्र को इस्तेमाल कब किया जाए। कई बार तो बच्चे दो–तीन सूत्रों में भ्रमित ;ब्वदनिमद्ध भी हो जाते हैं, जिसके कारण वह पूरा सूत्र ही गलत लिख बैठते हैं। इसका कारण यह होता है कि बच्चे मापन में प्रयोग होने वाली शब्दावली जैसे– क्षेत्रफल, परिमाप, पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन, धारिता आदि शब्दों का अर्थ समझ नहीं पाते हैं।

सूत्र रटवाने से पहले, हमें बच्चों को इन शब्दों से परिचित करवाना जरूरी है। इन शब्दों से परिचित करवाते समय हमें कुछ और बातों का ध्यान रखना होगा, जैसे इन सभी का आपस में संबंध व इनका अंतर।

जैसे सीमा भी दो विमिय आकृति आयत के परिमाप व क्षेत्रफल में भ्रमित (Confuse) हो गई थी। इसका कारण यह हो सकता है कि उसे क्षेत्रफल व परिमाप का अर्थ नहीं पता पर उनमें कुछ बातें समान दिख रही थीं, जैसे– दोनों सूत्रों में 'लम्बाई' व 'चौड़ाई' का प्रयोग दिख रहा था। इसलिए हमें यह भी कह सकते हैं कि वह सूत्रों में उलझ गई थी।

6.8.1 क्षेत्रफल का अर्थ

क्षेत्रफल किसी भी आकृति का दो विमिय फैलाव होता है। किसी आकृति या वस्तु के तल जितनी जगह घेरती है वह उस वस्तु का क्षेत्रफल होता है।



यह आकृति जितना कागज घेरती है वह इसका क्षेत्रफल है।

किसी वस्तु के कोई तल द्वारा घेरी गई जगह को जब हम मात्रात्मक रूप में व्यक्त करते हैं तो हमें सबसे पहले आवश्यकता पड़ती है एक इकाई की। जब हम किन्हीं आकृतियों या वस्तुओं का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं तो हम उसे किसी इकाई से मापते हैं, यह इकाई मानक व गैर मानक कोई भी हो सकती है।

यदि हमें केवल किन्हीं दो वस्तुओं के क्षेत्रफल की तुलना करनी हो तो हम गैर–मानक इकाईयों का इस्तेमाल भी कर सकते हैं। जैसे– दोनों वस्तुओं के क्षेत्रफल को डाक टिकट माचिस की खाली डिब्बियों से ढक कर देखने और यह पता लगाना कि कौन बड़ा और कौन छोटा है।

परन्तु यदि यहाँ पर किसी दूर बैठे व्यक्ति को किसी जगह के क्षेत्रफल के बारे में बताना हो तो हमें क्षेत्रफल मापने की एक सर्वमान्य इकाई (जो सबके लिए सटीक हो) की आवश्यकता होगी। हमें क्षेत्रफल मापने की भी एक ऐसी मानक इकाई चाहिए होगी जो पूरी दुनिया में सर्वमान्य हो। यह इकाई 1 वर्ग कि.मी. या 1 वर्ग मीटर या 1 वर्ग सेन्टीमीटर है।

यदि बच्चे लम्बाई मापने की इकाई सेन्टीमीटर से परिचित हैं तो उन्हें वर्ग सेन्टीमीटर को इस्तेमाल करने में कोई दिक्कत नहीं आएगी।

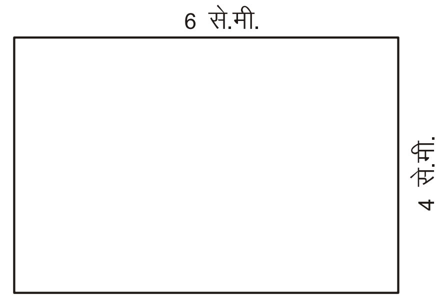
अगर बच्चों के पास क्षेत्रफल मापन की गैर मानक इकाईयों से मापने का अनुभव है तो आप उन्हें 1 सेमी. भुजा वाले वर्गों को आकृतियों पर जमा कर उनका क्षेत्रफल निकलवा सकते हैं। धीरे–धीरे बच्चों की आकृतियों को देखकर अन्दाजा लगा कर इस बात का उत्तर देने में वक्त नहीं लगेगा कि किसी आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा। यदि बच्चे एक बार इस बात को समझ जाएं तो उन्हें क्षेत्रफल के सूत्र से परिचित करवाना व उसका इस्तेमाल करना बहुत मुश्किल नहीं होगा।

मोहन ने अपनी कक्षा में बच्चों को 1 सेमी. वर्ग जमाकर आकृतियों के क्षेत्रफल पता लगवाए। बच्चे इस प्रकार से क्षेत्रफल निकालने से वे काफी आकृतियों के क्षेत्रफल का अन्दाजा भी लगाने लगे थे। अब मोहन उन्हें क्षेत्रफल के सूत्र बताना चाहता था। उसने बच्चों को एक आयताकार आकृति दिखाई व पूछा–

मोहन : इस आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा?

एक बच्चा : इसमें लगभग 25 वर्ग आ सकते हैं तो 25 वर्ग से.मी.।

दूसरा बच्चा : नहीं कुछ कम होने चाहिए। लगभग 20 वर्ग से.मी.।

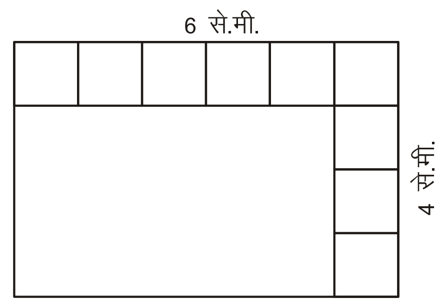


तीसरा बच्चा : सही उत्तर जाँचने के लिए हम इसमें 1 सेमी. के वर्ग बनाकर देख सकते हैं।

मोहन ने आकृति में वर्ग बनाने शुरू किए। मोहन ने इस तरह से आकृति में वर्ग बनाए।

मोहन : क्या अब सही क्षेत्रफल पता लगाया जा सकता है?

बच्चा : आँ.... हाँ, इसमें 24 वर्ग आ सकते हैं।



मोहन : शाबाश। तुमने यह कैसे बताया?

बच्चा : इसकी लम्बाई में 6 वर्ग हैं और चौड़ाई में 4 वर्ग हैं। तो जब मैं ऐसे ही 6 वर्गों को इस आकृति में 4 बार लगाऊँगा तो पूरा आयत 24 वर्ग सेमी. से ढक जाएगा।

मोहन : इस आकृति की लम्बाई कितनी है?

बच्चे : 6 सेमी.

मोहन : अच्छा! तो अब 6 सेमी. की लम्बाई में 1 सेमी. भुजा वाले कितने वर्ग लगाए जा सकते हैं?

बच्चा : अँ..... 6 वर्ग।

मोहन : हाँ, बिल्कुल ठीक।

और अगर ऐसे 6 वर्ग की कितनी पंक्तियाँ 4 सेमी. की चौड़ाई की इस आकृति में जमाई जा सकती है?

बच्चा : 4 पंक्तियाँ।

मोहन : तो कुल कितने वर्ग इस आकृति में जमाए जा सकते हैं?

बच्चे : 4 बार 6 वर्ग, यानी अँ.... 24 वर्ग।

मोहन : 4 बार 6 वर्ग का मतलब (4 × 6) वर्ग।

24 वर्ग सेमी. जो कि इसका क्षेत्रफल भी होगा।

मोहन ने बच्चों को ऐसे ही कुछ और आयतों का क्षेत्रफल पता लगाने को दिए। धीरे–धीरे बच्चे यह समझ गए कि जितनी आयत के भुजा की लम्बाई हो उतने वर्ग, जितनी चौड़ाई हो उतनी बार लगाएं तो आकृति को वर्ग पूरा ढक लेंगे और वर्गों की यह संख्या उस आयत का क्षेत्रफल होगा।

फिर मोहन ने बच्चों को इन सभी उदाहरणों की मदद से क्षेत्रफल पता लगाने का सूत्र बनवाया। बच्चों ने यह देखा कि जब भी वह आयत की लम्बाई को चौड़ाई से गुणा करते थे तो उनका क्षेत्रफल मिल जाता था। तो उन्होंने इसको सामान्यीकृत किया।

आयत का क्षेत्रफल = ल. × चौ.

क्योंकि क्षेत्रफल को मापा 1 सेमी. के वर्गों से जा रहा है तो क्षेत्रफल मापने की इकाई होगी वर्ग सेमी.।

प्रश्न : आप बच्चों को वर्ग व त्रिभुज के क्षेत्रफल की समझ विकसित करते हुए सूत्र तक कैसे पहुँचाएँगे? उदाहरण द्वारा समझाइए।

प्रश्न : अगर क्षेत्रफल मापने की इकाई 1 सेमी. भुजा वाले वर्ग की जगह 1 सेमी. भुजा वाले समबाहू त्रिभुज हो, तो आयत के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होगा? ज्ञात कीजिए।

यदि हमें किसी टेबल के चारों ओर रिबन लगाना हो तो हमें कितना लम्बा रिबन चाहिए होगा? क्या यह माप टेबल के ऊपर लगाने वाली लकड़ी के माप से अलग होगा?

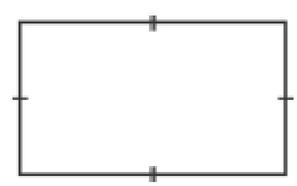
हाँ, क्योंकि जब मुझे टेबल के चारों ओर लगाने को रिबन चाहिए तो मुझे केवल टेबल के चारों ओर के माप को मिला के उसी लम्बाई का एक रिबन चाहिए होगा। पर जब मुझे उस पर रखे लकड़ी को मापना होगा तो मेरा काम केवल 1 माप (यानी लम्बाई) से नहीं चलेगा। मुझे उसके क्षेत्रफल को मापना पड़ेगा। (दो माप, लम्बाई व चौड़ाई)

यही अन्तर परिमाप व क्षेत्रफल में भी है। जब हम किसी समतल बन्द आकृति के किनारों को मापते हैं तो वह परिमाप होगा पर यदि हमें उस आकृति के तल को मापना है तो वह उसका क्षेत्रफल होगा।

परिमाप किसी भी दो विमिय आकृति के किनारों को एक विमीय में मापना है जबकि क्षेत्रफल, दो विमाओं में माप है। अब यदि किसी आयत के परिमाप के बारे में सोचें तो वह कुछ इस प्रकार होगा।

परिमाप = चारों भुजाओं का जोड़

= ल. + चौ. + ल. + चौ.



चूंकि आयत की आमने–सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं तो सूत्र होगा–

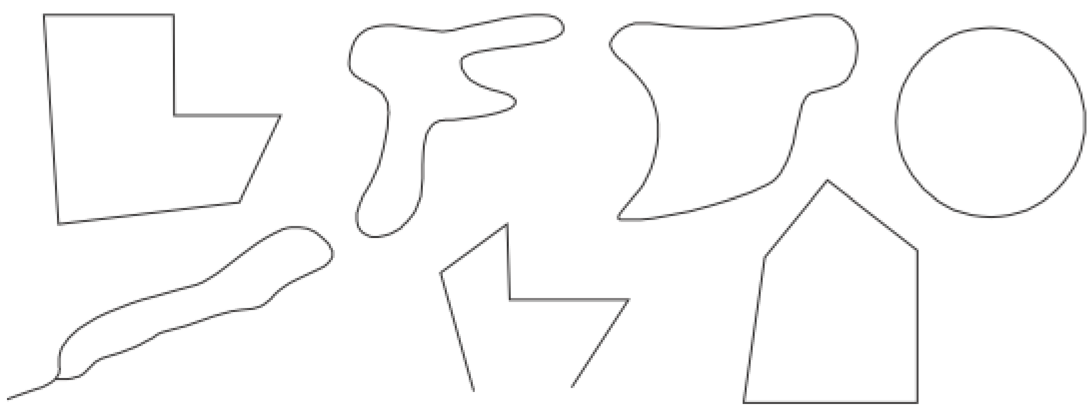
परिमाप = 2 ल. + 2 चौ.

= 2 (ल. + चौ.)

जब बच्चों को सूत्र इस्तेमाल कर सवाल हल करने को दिए जाते हैं तो वे कुछ शब्दों के अर्थ नहीं समझ पाते, केवल सूत्र रटते हैं। इन सूत्रों में लम्बाई व चौड़ाई के बीच कुछ संक्रियाओं के निशान लगे होते हैं जैसे जोड़ (+) या गुणा (×) का।

यह सूत्र बच्चों को मतलब व समझा कर उलझन में डाल देते हैं जिसकी वजह से बच्चे केवल सूत्रों को रट लेते हैं पर इनका इस्तेमाल कब व कैसे होगा यह समझ नहीं पाते।

प्रश्न : क्या इन आकृतियों का परिमाप मापा जा सकता है? कुछ तरीके सुझाइए।



6.9 आयतन

6.9.1 आयतन की समझ

आयतन 3–विमीय फैलाव का नाप है। डिब्बे, नोट बुक, बन्द पीपा, आलमारी, ईंट, पत्थर जैसी 3–विमीय बन्द वस्तुओं जितनी जगह घेरती हैं वह उनका आयतन होता है। आयतन यानी इन वस्तुओं द्वारा घेरी गई जगह। बच्चों को घेरी गई जगह का अहसास देने के लिए कुछ पत्थर, ईंटें, लोहे के टुकड़े आदि इकट्ठे कर लें। प्लास्टिक की एक बाल्टी में पानी भर लीजिए। हर वस्तु को धागे से बांधकर उन्हें एक–एक करके पानी में डुबाइए। देखिए कि क्या हर बार पानी का तल एक बराबर ही बढ़ता है। बच्चों से निम्न प्रश्नों पर चर्चा कीजिए।

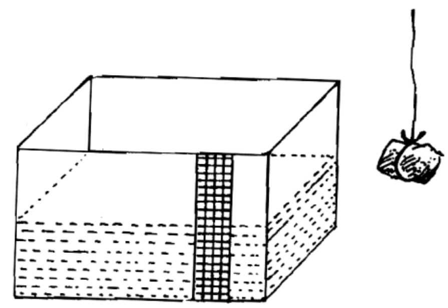
- पानी का तल सबसे ऊंचा कब उठा?
- ऐसा क्यों होता है?
- तल अलग–अलग क्यों बढ़ता है?
- डुबाई गई वस्तु के साइज और पानी के तल के बीच क्या संबंध होता है? आदि।

एक बार बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास हो जाए तो वे दो वस्तुओं के आयतन की तुलना कर सकते हैं। दो असमान वस्तुओं के आयतन की तुलना निम्नलिखित गतिविधि द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण : दो पत्थर लीजिए, जिनके आयतन की तुलना करनी है और कांच का एक आयताकार बर्तन लीजिए। कांच के बर्तन को $\frac{3}{4}$ पानी से भर दीजिए। इस पर चित्रानुसार ग्राफ पेपर की एक पट्टी चिपका दीजिए।

सबसे पहले ग्राफ पेपर की पट्टी के खाने गिनकर पानी का तल पढ़ लीजिए। अब पत्थरों को एक–एक धागे से बांध लीजिए। चित्र 2 के अनुसार एक पत्थर को पानी में डुबाइए और पानी के तल में हुए परिवर्तन को नोट कीजिए। इसी प्रकार से दूसरे पत्थर को पानी में डुबाकर पानी के तल को पढ़ लें।

बच्चों से पूछिए कि पानी का तल कब ज्यादा चढ़ा? क्यों? कौन सा पत्थर ज्यादा जगह घेरता है? किसका आयतन ज्यादा है? आदि।



कभी–कभी दो वस्तुओं के आयतन की तुलना उनके द्वारा घेरी गई जगह की तुलना से भी की जाती है। जैसे मेज की दराज में कौन सी वस्तु ज्यादा जगह घेरती है – माचिस या साबुन की डिबिया? कौन सी वस्तु बड़ी है? किसका आयतन ज्यादा है? आदि।

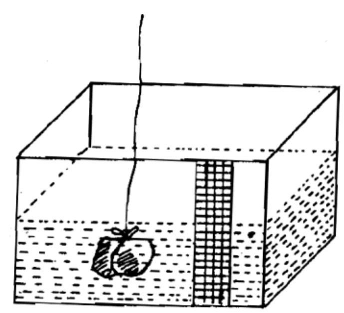
उपरोक्त गतिविधियों से बच्चों को यह समझने में मदद मिलेगी कि

i) हर वस्तु का एक नियमित या अनियमित आकार होता है।

ii) बड़ी वस्तुएँ ज्यादा जगह घेरती हैं।

iii) बड़ी वस्तुएँ पानी की सतह को ज्यादा ऊपर उठाती हैं।

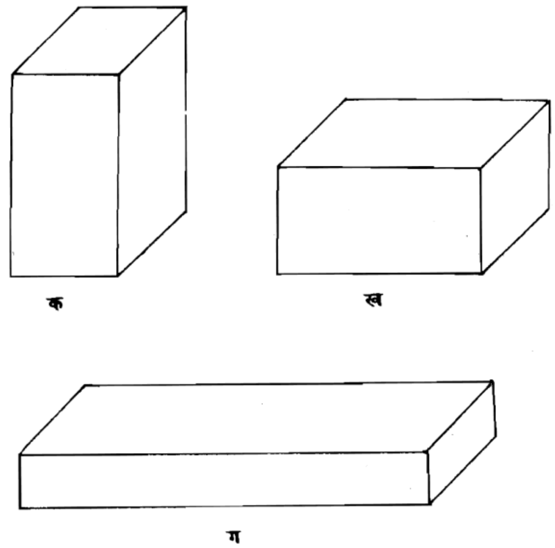
iv) जिस वस्तु का साइज ज्यादा हो, उसका आयतन भी ज्यादा होता है।



6.9.2 आयतन का संरक्षण

घेरे गए आयतन की अवधारणा सीखते हुए बच्चों को पदार्थ की मात्रा के संरक्षण का भी अहसास रहना चाहिए। इसका आकलन करने के लिए गतिविधि।

उदाहरण : एक शिक्षक अपनी कक्षा में बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास पहले ही दे चुके थे। अब वे उन्हें यह समझाना चाहते थे कि अलग–अलग आकृतियों की वस्तुओं का आयतन समान भी हो सकता है। इसके लिए उन्होंने बच्चों को लकड़ी के कुछ गुटके दिखाए। (चित्र 3) ।



चित्र 3

शिक्षक : क्या इन गुटकों का आयतन समान है?

(किसी से कोई उत्तर नहीं मिला, तो उन्होंने अपने प्रश्न को अलग ढंग से रखा)

शिक्षक : क्या इन सभी गुटकों को बराबर जगह चाहिए?

(इस बार भी चुप्पी रही।)

शिक्षक : चलो, मान लो कि ये चॉकलेट के गुटके हैं। अब बताओं कि क्या इन सबमें बराबर मात्रा में चॉकलेट हैं?

पहला बच्चा : नहीं, सबमें चॉकलेट की मात्रा अलग–अलग है।

दूसरा बच्चा : नहीं सर, मुझे लगता है कि पहले दो गुटकों में तो मात्रा बराबर है। बस उन्हें अलग–अलग तरह से रखा गया है। परन्तु तीसरे गुटके में मात्रा अलग है।

शिक्षक : क्या तुम यहां आकर समझा सकते हो?

लडके ने कई तरह से दूसरे गुटके की तुलना पहले गुटके के साथ की। वह यह कर ही रहा था कि अन्य बच्चे चिल्ला पड़े।

कई बच्चे : जी हां सर, पहले दो गुटके एक ही साइज के हैं।

शिक्षक : क्यों?

कक्षा में अस्पष्ट फुसफुसाहट होने लगी और एक बच्चा चिल्लाया।

एक लड़का : सर, ये बराबर जगह घेरते हैं।

शिक्षक : क्या तुम सब इससे सहमत हो?

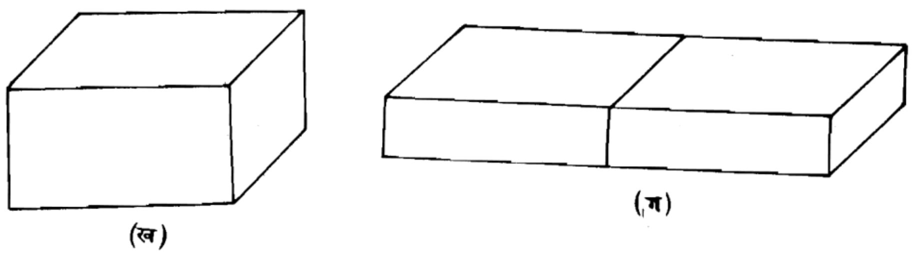
सारे बच्चे : जी सर।

शिक्षक : क्या मैं कह सकता हूं कि इनका आयतन समान है?

बच्चे सहर्ष सहमत हुए।

शिक्षक : परन्तु तीसरे गुटके के बारे में क्या कहोगे? इसका भी आयतन उतना ही है। यदि तुम इसे ध्यान से देखोगे तो पता चलेगा कि इसकी ऊंचाई तो (ख) से आधी है मगर लम्बाई उससे दुगनी है।

परन्तु बच्चे भ्रमित नजर आ रहे थे। इसलिए शिक्षक ने उनके सामने (ख) और (ग) के ही समान दो और गुटके रखे। अन्तर सिर्फ इतना था कि इस बार (ग) दो भागों में बंटा हुआ था। (चित्र 4)।



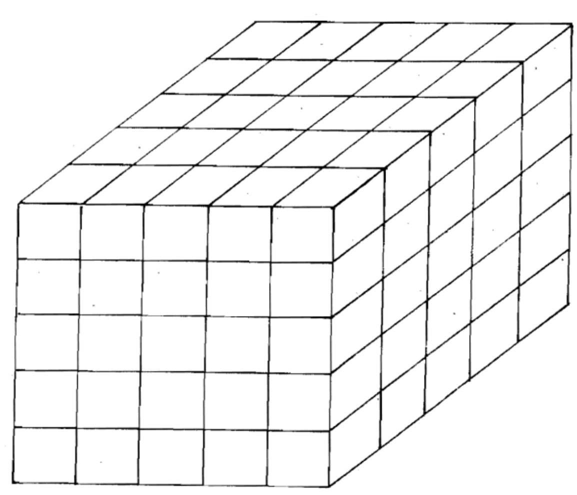
चित्र 4

शिक्षक ने दूसरे गुटके के टुकड़ों को अलग–अलग किया और उन्हें एक–दूसरे के ऊपर इस तरह जमाया कि नया गुटका हुबहू चित्र 4 (ख) में दिखाये गुटके जैसा दिखने लगा। तब बच्चे यह समझ गए कि सभी गुटकों चित्र 3 (क, ख व ग) के साइज/आयतन समान थे।

प्रश्न : आप बच्चों को यह अवधारणा समझने में कैसे मदद करेंगे कि अलग–अलग आकृतियों वाली वस्तुओं का आयतन समान भी हो सकता है?

6.9.3 आयतन की इकाई

आयतन नापने की मानक इकाई बताने के लिए 1 सेमी. × 1 सेमी. × 1 सेमी. नाप वाले छोटे घन को इकाई के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है। बच्चों को यहां दिक्कत यह आती है कि किसी ठोस वस्तु द्वारा घेरे गए आयतन तथा इसके संरक्षण की अवधारणा समझ लेने के बाद भी वे यह बात नहीं समझ पाते कि आयतन की तुलना किसी घन इकाई के बार–बार उपयोग से की जा सकती है। ठोस वस्तुओं के इकाई घनों से मिलकर बने होने की बात इसलिए स्पष्ट नहीं होती क्योंकि इसमें कई सारी घन इकाइयां तो उन्हें नजर



ही नहीं आती। जैसे, किसी घनाकार ठोस के मध्य भाग में जो इकाइयां होती हैं। इस के लिए आप गतिविधि की मदद ले सकते हैं। वे लकड़ी के गुटकों (ब्लॉक्स) को तरह–तरह से जोड़–तोड़ कर अलग–अलग आकृतियां बनाये। उन्हें छोटे–छोटे घनाकार गुटकों को जोड़कर बना कोई ब्लॉक दिखाइए व उन्हें खुद पता करने दीजिए कि इस ब्लॉक में कितने छोटे घन लगे हैं (चित्र 5)।

उनसे यह पता करने को कहिए कि घनाकर गुटकों के रूप में ब्लॉक का आयतन कितना है। कुल कितने सेंटीमीटर घन हैं। आप उन्हें टोलियों में काम करने को भी कह सकते हैं। हर टोली इन घनाकार गुटकों से कोई ढांचा बनाए – जैसे समान्तर–षट्फलक या घनाभ। हर टोली से निम्न बिन्दुओं पर चर्चा करे–

i) पूरे ढांचे को बनाने में लगे घनों की संख्या।

ii) ढांचे में परतों की संख्या।

iii) एक परत में कतारों की संख्या।

iv) एक कतार में घनों की संख्या।

v) एक परत में घनों की संख्या।

vi) इन घनों के रूप में ढांचे का आयतन।

vii) सारे घनों को गिनने के बजाय आयतन निकालने का छोटा तरीका।

जब आप उनके उत्तर से संतुष्ट हो जाएं तो उनसे इस घन की भुजा नापने को कहें। इससे पता चलेगा कि इस घन की हर भुजा 1 सेमी. है। तब आप उन्हें बता सकते हैं कि इसे एक सेंटीमीटर घन कहते हैं ओर ढांचे का जो आयतन उन्होंने नापा है वह सेंटीमीटर घन में है। सेंटीमीटर घन को $(\text{सेमी.})^3$ भी लिखते हैं। यह आयतन नापने की मानक इकाई है। इसी प्रकार से बड़े ढांचों का आयतन नापने के लिए 1 मीटर भुजा वाले घन का इस्तेमाल किया जाता है। तब $(\text{मी.})^3$ को आयतन नापने की मानक इकाई कहा जाता है।

इस गतिविधि से बच्चों को घन व घनाभ के आयतन का सूत्र खुद प्राप्त करने में भी मदद मिलेगी। वे यह समझ पाएंगे कि

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौडाई × ऊंचाई

और घन का आयतन = $(\text{लम्बाई})^3$ होता है।

प्रश्न : आयतन नापने की कोई गतिविधि करने के लिए आप कम लागत का क्या शिक्षण–साधन सुझाएंगे?

6.10 धारिता :

किसी बर्तन की धारिता का अर्थ है कि उसमें कितना तरल पदार्थ या रेत या नमक भरा जा सकता है। बच्चों को तरल पदार्थ की मात्रा का अनुमान लगाने में ठोस पदार्थों की अपेक्षा दिक्कत होती है। क्योंकि

द्रव पदार्थ का कोई निश्चित आकार नहीं होता, जिस पात्र में इसे रखा जाता है यह उसी के आकार धारण कर लेता है। एक बर्त्तन की धारिता द्रव के आयतन को प्रदर्शित करता है, इसी प्रकार नामक या चूर्ण जैसी वस्तु का आयतन भी ज्ञात किया जा सकता है। यदि जग को पूर्ण रूप से 10 समान कप पानी से भरा जा सकता है तो 10 कप पानी जग की धारिता है। यदि प्रत्येक कप की धारिता 100 मिली है तो जग की धारिता लीटर होगी।

शुरूआत में बच्चों को अलग–अलग बर्त्तनों की धारिता अमानक इकाई का उपयोग करके मापने के अवसर प्रदान करना चाहिए। कुछ इसी प्रकार के क्रियाकलाप जिन्हें बच्चे स्कूल के भीतर या बाहर कर सकते हैं, नीचे दिया गया है।

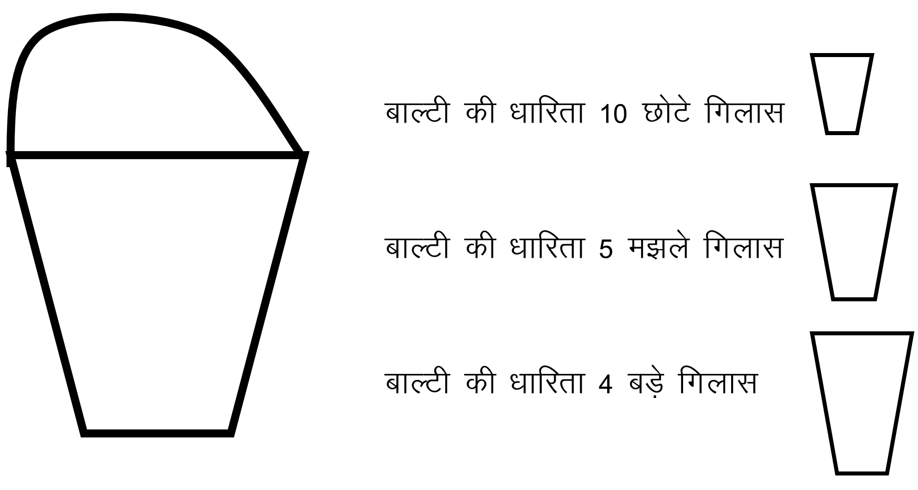
– एक बाल्टी में बोतल से पानी भरना
– एक कप से जग में पानी भरना
– एक बाल्टी से विद्यालय के पीने के पानी की टंकी भरना
– एक ग्लास से एक घड़े में पानी भरना

जब बच्चे अमानक इकाईयों अर्थात् ग्लास, कप, जग, लोटा की सहायता से किसी बर्तन की धारिता मापने का काफी अभ्यास हो जायें, तभी उन्हें मानक इकाईयों की आवश्यकता महसूस कराने के लिए निम्न क्रियाकलाप करायें।

क्रियाकलाप :

तीन अलग–अलग आकार के गिलास तथा एक छोटा कप लिजिए। अब तीनों गिलास की धारिता कप में प्राप्त किजिए।

इस मामले में कप धारिता मापने की भौतिक इकाई मानी जायेगी तब आप धारिता की बात इस भौतिक इकाई के संदर्भ में कर सकते हैं। यहाँ छोटे ग्लास की धारिता 2 कप है। मझले गिलास की धारिता 4 कप है और बड़े गिलास की धारिता 5 कप है। अब एक बाल्टी लायें और बाल्टी की धारिता तीनों प्रकार के गिलासों से निकालने का मौका बच्चों को दें।

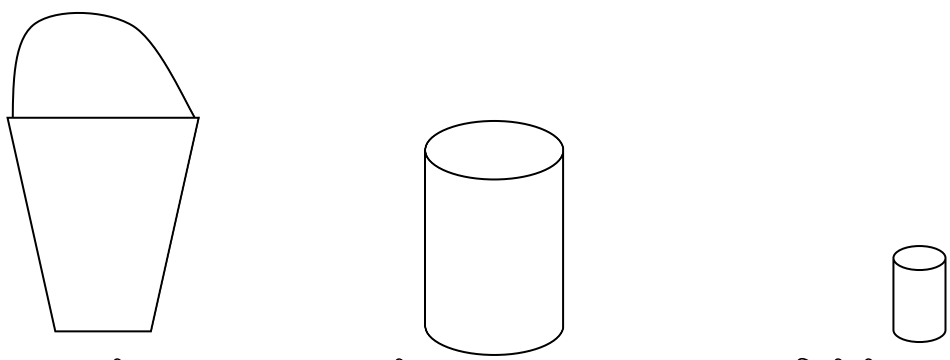


कुछ इसी तरह की गतिविधियों से बच्चे जल्दी समझ जाते हैं कि एक ही नाम के पात्र (बर्त्तन) की धारिता अलग–अलग होती है। और वे धारिता मापने के लिए मानक इकाई की जरूरत समझने लगते हैं। उन्हें मानक इकाई की जरूरत महसूस कराने के लिए आप उसी तरह की चर्चा शुरू कर सकते हैं, जैसे लम्बाई के संदर्भ में की थी।

धारिता मापने की मानक इकाई लीटर है। एक लीटर 100 घन सेंटीमीटर या 100 सेमी^{3} के बराबर होता है। व्यावहारिक दृष्टि से लीटर और मिलीलीटर (1 लीटर = 1000 मिलीलीटर) का प्रयोग प्राथमिक कक्षाओं में उपयुक्त है। इसके निम्न क्रियाकलाप किए जा सकते हैं। :–

क्रियाकलाप :

आप बच्चों को एक ऐसा फ्लास्क दीजिए जिसमें 1 लीटर पानी समा सकती है। साथ में एक खाली डब्बा या शीशी दीजिए जिसमें 100 मिलीलीटर (यानी लीटर का 10वां भाग) पानी आता हो (100 मिलीलीटर के दही, दवा आदि का बर्त्तन असानी से उपलब्ध होते हैं।) बच्चे आसानी से देख पाएंगे कि ऐसे 10 डिब्बे से फ्लास्क की सहायता से दूसरे बर्त्तन जैसे बाल्टी की धारिता ज्ञात की सकती है। मान ले बाल्टी में 4 फ्लास्क और 5 डब्बे पानी समाता है,



बाल्टी 1 लीटर का फ्लास्क 100 मिलीलीटर का डब्बा

तो इसका अर्थ होगा कि बाल्टी की धारिता 4 लीटर 500 मिलीलीटर है। इसके बाद बच्चों को किराने की दुकान में तेल नापने वाले उपकरण या दूध नापने वाले उपकरण से परिचित करा सकते हैं।

प्रश्न : आप अपनी कक्षा में धारिता की अवधारणा सिखाने के लिए क्या प्रक्रिया अपनाते हैं?

प्रश्न : आप धारिता और आयतन की अवधारणा का अन्तर कैसे समझाएंगे?

6.11 समय का माप

मैंने अपने पड़ोसी के बेटे मोनू से पूछा कि 'अभी घड़ी में कितने बजे हैं तो उसने सही सही बता दिया कि 10 बजे हैं।' फिर मैंने उससे पूछा कि उसकी क्लास उससे पहले शुरू होती है या बाद में तो उसके पास कोई जवाब न था। क्या आप यह कह सकते हैं कि मोनू ने समय से अवधारणाएँ समझ ली है? समय की अवधारणा में एक अवधारणा है घअनाओं को सिलसिलेवार जमाना। यानि कौन सी घटना किसी अन्य घटना से पहले या बाद में हुई और उनके बीच कितने समय का अन्तर रहा। अन्य अवधारणाओं में 'समय का बीतना' समय का एक क्षण और समय का अन्तराल शामिल है।

6.11.1 कल, आज और कल

सभी बच्चों को समय का एक मोटा–मोटा अहसास तो होता ही है। मसलन जब कोई बच्ची यह शिकायत करती है कि उसे स्कूल जाने के लिए 'जल्दी' उठना पड़ता है जबकि उसकी बहन सोती रहती है, तो उसके शब्द 'जल्दी' का संबंध समय से ही तो है। इसी तरह से बच्चे अलग–अलग कामों में लगने वाले समय की तुलना के लिए कई शब्दों का इस्तेमाल करते हैं। गाँवों में यह एक आम खेल है कि जब बच्चे नदी–तालाब में नहाते हैं तो एक बच्चा पानी में डुबकी लगाता है और दूसरे बच्चे किनारे पर बैठकर 1, 2, 3, ... गिनना शुरू कर देता है। इस तरह से देखा जाता है कि वह कितनी देर तक पानी के अंदर डुबकी लगाकर रह सकता है। और फिर कौन सबसे ज्यादा देर तक पानी में रहा, इस बात को लेकर एक दूसरे से तुलना की जाती है।

समय से संबंधित ऐसे और कौन–कौन से शब्द हैं जिनका इस्तेमाल 6–7 साल के बच्चे आमतौर पर करते हैं? निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आप कुछ ऐसे उदाहरण सोच सकते हैं।

प्रश्न : अपने आसपास के बच्चों से बातचीत करके ऐसे 10 शब्दों की सूची बनाइए जिनका इस्तेमाल वे समय को व्यक्त करने के लिए करते हैं।

हम अगर 7 बरस की किसी बच्ची से पूछें कि उसकी उम्र ज्यादा है या उसके पिता की, तो शायद वह आसानी से बता देगी। हम अगर उनसे यह पूछें कि 'उन दोनों में से कौन पहले पैदा हुआ था', तो शायद जवाब देने से पहले वह थोडा सोचेगी। और हम अगर उससे यह पूछ लें कि 'तुम्हारे पिता और दादा में से कौन पहले पैदा हुए थे', तो शायद उसके लिए सचमुच एक समस्या उठ खड़ी हो। इससे क्या पता चलता है? इससे ज़ाहिर होता है कि जो तभी घटा हो, उसको समझ पाना उसके लिए इतना मुश्किल नहीं है मगर काफी समय पहले घटी घटनाओं में समय का हिसाब लगा पाना उसके बस के बाहर है।

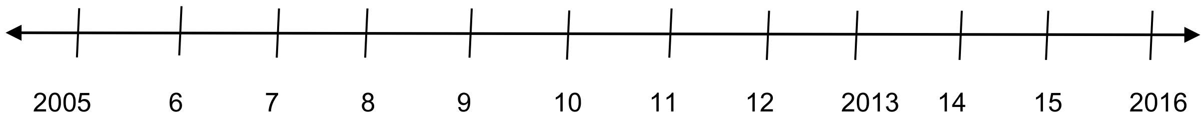
बच्चों से कहें कि वह सुबह से अभी तक के कार्यों को क्रम से सुनाएँ। आप उन्हें आज से बातचीत शुरू करके बीते हुए कल, पिछले महीने, पिछले वर्ष या कुछ वर्ष पूर्व के घटनाओं को क्रम से व्यवस्थित करके उनमें समय की समझ विकसित करें।

इसी प्रकार बच्चों के साथ ऐसे कार्यक्रमों की सूची बना सकते हैं, जिसे आप बच्चों के साथ मिलकर आने वाले कल, अगले सप्ताह या अगले माह पूरा करेंगे। इन सबके लिए आप बच्चों से औपचारिक और अनौपचारिक रूप से विभिन्न समयावधि में धटित घटनाओं के बारे में बात करें और प्रश्न करें।

एक शिक्षिका बच्चों से बातचीत के क्रम में इस प्रकार के प्रश्न पूछती है :

– आपके घर में सबसे पहले कौन जगता है ?
– आज क्लास में सबसे बाद में कौन आया ?
– आज कौन–सा दिन है ?
– कल कौन–सा दिन था ?
– कल कौन–सा दिन होगा ?
– कल आपकी कक्षा में गणित कौन से पीरियड में पढ़ाया जायेगा ?
– कौन बड़ा है आप या आपका दोस्त ?
– आप मोजे तथा जूते में से बाद में किसे पहनते हैं ?

समय से संबंधित जितनी अधिक बातें आप बच्चों के साथ करेगें उतनी ही उनकी समय की समझ तेज होगीं। इन बातों के अतिरिक्त बच्चों को ऐसी स्थितियाँ उपलब्ध करायें जिनमें वे घटनाओं को समय रेखा पर व्यवस्थित करने का प्रयास करें। जैसे बच्चे समय रेखा को समझे (यह तभी उचित होगा, जब संख्या रेखा से बच्चा परिचित है) और निम्न प्रश्नों के उत्तर ढुंढे।



1) तुम्हारा जन्म किस वर्ष में हुआ ?
2) तुम्हरी पहली सालगिरह कब थी ?
3) अभी तुम्हारी उम्र कितनी है ?
4) सन् 2016 में तुम्हारी उम्र कितनी होगी ?

इस रेखा से बच्चे को यह भी समझनें में मदद मिलती है कि भूत और भविष्य दोनों ही अन्तहीन हैं। कल, आज, और कल की समझ के लिए निम्न गतिविधि कराई जा सकती है, इसके तीन चरण है–

चरण 1. 5–6 कार्ड बनाएँ जिसमें सिर्फ एक चीज–तारीख या महना या साल बदलें, जैसे–

5 जनवरी 2013	2 जनवरी 2013	15 जनवरी 2013
30 जनवरी 2013	20 जनवरी 2013	18 जनवरी 2013

बच्चों को इन्हें क्रम में सजाने को कहें।

चरण 2. चरण दो में दो चीजे बदलकर कार्ड बनाये तथा चरण तीन में तीनों चीजें–तारीख, महीना और वर्ष बदलकर कार्ड बनाएँ और बच्चों से क्रम में सजाने को कहें। ध्यान देगें एक–एक चरण करने में महीनों लग सकते हैं यह बच्चों के उम्र एवं समझ पर निर्भर करेगा।

6.11.2 क्षण और समयावधि :

मैनें एक बच्चे से पूछा कि तुम्हारा विद्यालय किस समय शुरू होता है? तो उसका जबाब था– सुबह 9 बजे। तो बताओ 12 बजे तक कितने घंटे होगें ? उसने मन में बुदबुदाते हुए कहा– 3 घंटे। मैनें पुछा कैसे, तो बताया कि 10, 11, 12 – कुल तीन घंटे हुए। यहाँ पहले सवाल का संबंध समय के एक क्षण से है और दूसरे का संबंध समय अन्तराल या समय की अवधि से है। समय के एक क्षण का मतलब उस समय से है जिस पर कि कोई घटना घटती है। जैसे– 9 बजे, सोमवार को, 1947 ई० आदि।

बच्चों में समझ विकसित करने के लिए उसे अपने दिन भर के क्रियाकलापों की एक सूची बनाने को कहिए और साथ में यह भी लिखवाएं कि कौन सा काम किस समय करता है। इसी प्रकार उससे ऐसे सवाल भी पुछ सकते हैं कि ''अगर मैं 6 बजे सुबह उठा और 14 घंटे बाद सो गया, तो बताओ कि मैं कितने बजे सोया?

यहाँ यह बात सामने आती है कि स्कूल पूर्व स्तर से ही बच्चों को कई गतिविधियों के जरिए घटनाओं को क्रम में जमाने का प्रशिक्षण देखा शुरू करना जरूरी है। इससे आगे चलकर बच्चे को समय

की स्पष्ट समझ विकसित करने से मदद मिलेगी। 'समय की अवधारणा' की समझ धीरे–धीरे बनती है। जैसे–जैसे बच्चों का अनुभव बढ़ता है वैसे–वैसे उसकी समझ बेहतर होती जाती है।

उदाहरण : शिक्षक कक्षा 4 के बच्चों को सारे विषय पढ़ाती थी। स्कूल सुबह 9 बजे से दोपहर 1 बजे तक लगता था। वह अपने साथ कई कार्ड लेकर आई थी। हर कार्ड पर दिन का कोई समय लिखा, जिसे 10.00, 11.15, 11.40, 12.10, 12.30 वगैरह। दीवार पर एक घड़ी भी टंगी थी। उसने बच्चों से घड़ी की ओर इशारा करते हुए कहा।

शिक्षक : तुम सब घड़ी पढ़ना जानते हो, है ना?

छात्र : हाँ।

शिक्षक :अब मैं जाँच करूंगी कि तुम घड़ी सही–सही देख सकते हो या नहीं। ये कुछ कार्ड हैं। (वे हर बच्चे को एक–एक कार्ड दे देती हैं और बच्चे कार्ड देखते हैं।) हर कार्ड पर एक समय लिखा है। अब तुम्हें करना यह है कि बीच–बीच में घड़ी देखते रहो। जब भी घड़ी में वही समय हो जाए जो तुम्हारे कार्ड पर है, तो कार्ड मुझे लौटा दो। जो भी यह काम सही सही करेगा, उसे इनाम मिलेगा।

कुछ बच्चे सही–सही यह काम कर पाए और कुछ नहीं। जो बच्चे सही नहीं कर पाए थे, उन्हें उसने कुछ समझाया और अगले दिन फिर से कोशिश करने को कहा। पहली कक्षा के बाद मैंने उससे पूछा कि इस गतिविधि के करने का मकसद क्या है? उसने बताया कि इस गतिविधि का मकसद यह है कि सही समय बताने की उनकी क्षमता बेहतर बने। इससे वे दिन के समय के प्रति ज्यादा जागरूक बनते हैं। उसने बताया कि वह यह गतिविधि एक हफ्ते तक नियमित समय अन्तराल पर देती रहेगी। इस समय तक बच्चे घड़ी देखकर सही समय बताना सीख जाएंगे। फिर उसने मुझे अगले हफ्ते किसी भी दिन आने को कहा।

अगली बार गई तो वह कोई अन्य गतिविधि आजमा रही थी। यह गणित की कक्षा थी और उसने उनके साथ एक अन्य गतिविधि करने का फैसला किया था। उसने कक्षा को 5 टॉलियों में बांटा। हर टोली को उसने 5 खाली कार्डों का एक एक सेट दे दिया। फिर उन्होंने एक टोली से दूसरी टोली के पास जा जाकर बच्चों को यह गतिविधि सिखाई। उदाहरण के तौर पर–

शिक्षक : घड़ी देखकर बताओ कि समय क्या हुआ है?

टोली 1 : 9.30

शिक्षक :सही। अब तुम्हें करना यह है कि हर आधे घण्टे बाद एक कार्ड वापिस करो। घड़ी देख सकते हो और कार्ड वापिस करने से पहले उस पर समय भी लिखना होगा। इसमें थोड़ी कठिनाई होती है तो आपस में चर्चा करके साफ तौर पर समझकर लिखें।

वह इसी प्रकार हर टोली के साथ गतिविधि करती रही और उसने टोली 2 को कार्ड का एक सेट दिया। उनसे उसने हर 1 घण्टे में कार्ड लौटाने को कहा। इसी प्रकार के कार्ड उसने टोली 3, 4, 5 को भी दिए और समय के अलग–अलग अंतराल भी बताए। उसने उन टोलियों को इनाम भी देना तय किया जो 5 कार्ड सही–सही वापिस लौटा देगी। उन्होंने इस गतिविधि को कुछ दिनों तक 'समय समय पर दोहराई'। बहुत मुमकिन है कि अगर कोई बच्ची इस गतिविधि को सही–सही कर लेती है, तो वह यह समझ चुकी है

कि 9.30 + 30 मिनट बराबर 10 होता है। पर इससे यह जाँचने में कैसे मदद मिलेगी कि बच्ची 1/2 घण्टे की अवधि का मतलब भी समझ गई है या नहीं?

इसके लिए उसने गतिविधि में थोड़ा संशोधन करके बच्चों को कहा कि घड़ी की सहायता के बगैर ही हर आधे घण्टे (या 1 घण्टे) में एक–एक कार्ड लौटाएं। उसने इसके लिए इस गतिविधि को अलग अलग तरह से दे दिया है अवधि को बदलकर '20 मिनट', '10 मिनट' वगैरह करके उसने बताया कि इस गतिविधि से बच्चों को 'समय की अवधि का मोटा–मोटा अन्दाज़' लगाने में मदद मिलेगी।

उसने टोलियों के अनुसार एक गतिविधि यह भी आजमाई कि हर टोली को करने के लिए कोई क्रिया दे दी– जैसे कोई गीत गाना, दीवार तक जाना और उसे छूना, ताली बजाना, किसी किताब से कोई अंश उतारना आदि।उन्हें इस काम को एक तयशुदा अवधि के लिए करना होता है। मसलन शुरू में आधा घण्टा, फिर 5 मिनट, 1 मिनट वगैरह। इससे उन्हें समयावधि एक अहसास बनाने में मदद मिलेगी। इससे उन्हें यह भी समझने में मदद मिलती है कि एक ही काम को करने में अलग–अलग लोगों को अलग–अलग समय लगता है। मैंने गौर किया कि वह हर मर्तबा टोलियों से खूब बातचीत करती थी। उसने उन्हें उनके रोज़मर्रा के काम से संबंधित कई अभ्यास घर पर करने को भी दिए।

प्रश्न : किसी बच्ची की 'एक क्षण' और 'समय अंतराल' की समझ का अन्दाज़ लगाने के लिए आप उसे किस तरह के अभ्यास/गतिविधियाँ देंगे?

प्रश्न : एक मैदानी खेल सुझाइए जिससे बच्चों की 'समय अंतराल' की अवधारणा की समझ बेहतर बने।

6.11.3 दिन, सप्ताह, महीने और वर्ष :

एक सूर्योदय से अगले सूर्योदय के बीच के समय को एक दिन कहते हैं। परन्तु वैज्ञानिक लगातार दो मध्य रात्रियों के बीच के समय को एक दिन के रूप में गणना करते हैं। इसे सूर्य–दिवस भी कहा जाता है। अर्थात् पृथ्वी द्वारा अपने अक्ष पर एक चक्कर पूरा करने में लिए गये समय को एक सूर्य–दिवस समय कहते हैं। एक दिन का मतलब घंटे की किसी भी अवधि से हो सकता है इसी प्रकार से एक सप्ताह, महीने और वर्ष को भी जानी पहचानी घटनाओं के बीच की अवधि से जोड़ा जा सकता है। जैसे– एक पूर्णिमा से दूसरी पूर्णिमा के बीच की अवधि 1 महिना है या 1 महिना 4 हफ्तों के बीच की अवधि है।

कैलेण्डर बच्चों को समय के बीतने का हिसाब–किताब रखने का एक व्यवस्थित तरीका सिखाता है। हर वर्ष मौसम बदलने के साथ हम दिनों, हफ्तों, महीनों के एक नियमित चक्र में से गुज़रते हैं। सालगिरह और छुट्टियाँ साल–दर–साल आती हैं। लिहाज़ा अगली बार जब आप कैलेण्डर खरीदने जाएं, तो अपने बच्चे को साथ ले जाएं। ऐसा कैलेण्डर तलाश करें जिस पर आकर्षक चित्र के अलावा बड़े–बड़े खाने हों जिनमें लिखा जा सके, चित्र बनाए जा सकें। शुरूआत में आप बच्चे से कह सकते हैं कि वह कैलेण्डर पर उन दिनों को नोट करें जो परिवार के लिए खास महत्व रखते हों। आप हफ्ते या महीने की महत्वपूर्ण घटनाएं भी अंकित कर सकते हैं। यहाँ कैलेण्डर के साथ एक गतिविधि दी जा रही है। इससे आप यह पता लगा सकते हैं कि बच्चे इस बात को कितना समझते हैं कि किस महीने में 30 दिन होते हैं और किसमें 31।

1 सूर्य दिवस = 24 घंटे, 1 घंटा = 60 मिनट, 1 मिनट = 60 सेकेंड

गतिविधि : एक पुराना कैलेण्डर लीजिए। इसमें से महीनों के नाम हटा दीजिए, सिर्फ तारीख वाला हिस्सा रहने दीजिए। अब बच्चों से कहिए कि कैलेण्डर को फिर से सही तरीके से जमाएं। वे खुद ही तय करें कि कौन सा पन्ना जनवरी का है, कौन सा फरवरी का है आदि और उन्हें ठीक क्रम में जमाएं।

प्रश्न : अपने आसपास के 10 वर्षीय बच्चे के साथ यह गतिविधि करके इसका असर देखिए।

सूर्य वर्ष :

पृथ्वी सूर्य की एक परिक्रमा करने में जितना समय लेता है उसे एक सूर्य वर्ष कहते हैं।

1 सूर्य वर्ष = 365 दिन 5 घंटे, 48 मिनट 47 सेकेंड

एक कैलेन्डर वर्ष में 365 दिन होते हैं। इससे प्रत्येक वर्ष लगभग 6 घंटे बच जाते हैं। इसे पूरा करने के लिए प्रत्येक 4 वर्ष में एक वर्ष 366 दिन रखा जाता है और उस वर्ष को लीप वर्ष कहते हैं।

जो वर्ष 4 से पूर्ण रूप से विभाजित हो जाता है, वह लीप वर्ष होता है और उस वर्ष फरवरी में 28 दिन के बजाय 29 दिन होते हैं।

बच्चों को महीनों, ऋतुओं, छुट्टियों, मौसम आदि से परिचित कराने का एक तरीका यह भी है कि उन्हें इससे सम्बंधित गीत, कविताएँ, गाने और रचने का अवसर दें। उदाहरण :

महीनों के गीत

अप्रैल, जून, सितंम्बर, नबम्बर के होते हैं दिन तीस

फरवरी के होते है दिन अठ्ठाईसबपर लीप वर्ष में होते हैं दिन उनतीस

बाकि सब महीनों के होते हैं दिन इकतीस

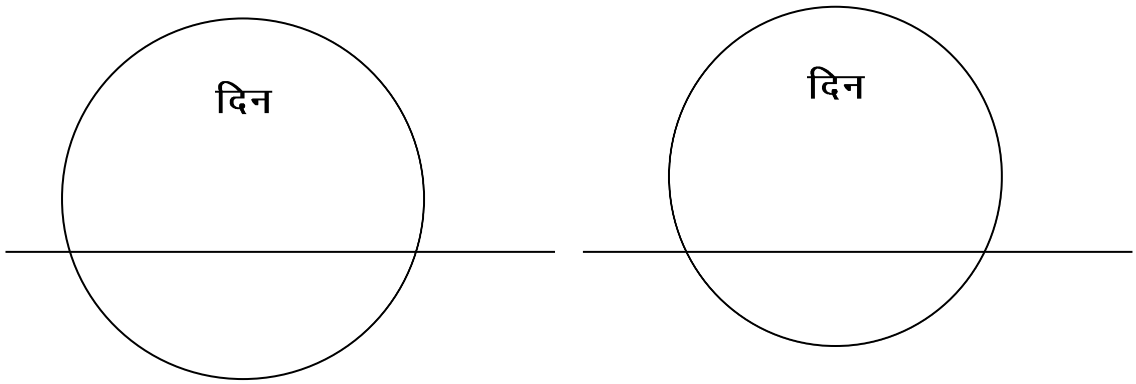
कक्षा–3 की पुस्तक में, एक हाथ की मुट्ठी बाँध कर शुरूआत में उभरी हुई हड्डी और गड्ढ़ा पर आगे बढ़ने से उभरी हुई हड्डियों पर आए महीने 31 दिन के होते हैं। यह भी बच्चों को सीखाएँ।

अपवाद : ऐसे वर्ष अंक जिसमें इकाई और दहाई के स्थान पर '0' (शून्य) हो तो वह 4 से विभाजित होता है परन्तु तभी लीप वर्ष होते हैं जब ऐसे वर्ष 400 के गुणज हैं। इस प्रकार 2000 लीप वर्ष है परन्तु 1900, 1800, 2200 आदि लीप वर्ष नहीं है।

6.11.4 घड़ी में समय :

5–7 वर्षीय बच्चों को तब बहुत दिक्कत होती है जब वे 24 घण्टे की घड़ी के आधार पर व्यक्त समय देखते है। उन्हें समझ नहीं आता कि यह क्या समय दिखा रहा है। यह इसलिए होता है कि जब उन्होंने अपने शिक्षक या माता–पिता से समय सीखा था, तब साधारण घड़ी का ही इस्तेमाल हुआ था यानि 12 बजे से 12 तक का। 24 घण्टे की घड़ी तो स्कूल में थोड़ी देर से सीखाई जाती है और नहीं भी।

हमें दोनों प्रकार की घड़ियों से बच्चों का परिचय कराना चाहिए, 12 घंटा–घंड़ी और 24 घंटा घड़ी सामान्यतः हम 12 घंटा–घड़ी का इस्तेमाल करते हैं किन्तु रेलवे और वायुयान में 24 घंटे वाली घड़ी का इस्तेमाल होता है।



12 घंटा–घड़ी में डायल पर 1 से 12 तक घंटो के निशान बने होते हैं। घंटे की सुई 12 घंटे में एक चक्कर पूरा करती है और मिनट की सुई 1 मिनट में एक चक्कर पूरा करता है। मध्य रात्रि और दोपहर को 12 से निरूिपित किया जाता है। 12 मध्यरात्रि और दोपहर के मध्य की अवधि को ।ड के रूप में चिन्हित करते हैं जैसे सुबह 6 बजे को 6 ँउ के और 12 बजे दोपहर से 12 बजे मध्यरात्रि के बीच की अवधि को च्ड से चिन्हित करते हैं, जैसे शाम के 6 बजे को 6 चउ ।

24 घंटा–घड़ी में मध्यरात्रि को 24 घंटा से निरूपित किया जाता है तथा उसके बाद के घंटो को 1 बजे, 2 बजे .... और इसी प्रकार अगले मध्यरात्रि तक गणना करते हैं, इसमें **ँउ** और **चउ** के इस्तेमाल की आवश्यकता नहीं होती है।

अगर आपसे कोई 8 साल की बच्ची 19:00:00 जैसा कोइ समय देखकर आपसे पूछती है कि यह क्या समय दिखा रहा है? आप उसे कैसे यकीन दिलाएगे कि यह समय शाम 7 बजे (7 च्ड) का है? इसका एक उदाहरण जो मैंने एक बच्चे के साथ कैसे काम किया।

उदाहरण : टी.वी. पर खबर (समाचार) शुरू होने से पहले समय दिखाया गया 16:00:00। 8 साल के अब्दुल ने यह देखकर पूछा–

यह टी.वी. पर क्या लिखा है 16:00:00

तो मैंने बताया कि यह समाचार शुरू होने का समय है।

उसने घड़ी की ओर देखा और बोला अभी तो 4 बजे है तो टी.वी. पर 4 बजे को नहीं बताया।

जैसे थोड़ी देर सोचा कि कैसे समझाऊ कि 4 बजे और 16:00:00 एक ही बात है।

फिर मैंने उससे बात की।

मैं – तुम्हें पता है एक दिन में कितने घंटे होते हैं?

अब्दुल – 24 घण्टे।

मैं – अभी क्या समय हुआ है?

अब्दुल – 4 बजकर तीस मिनट।

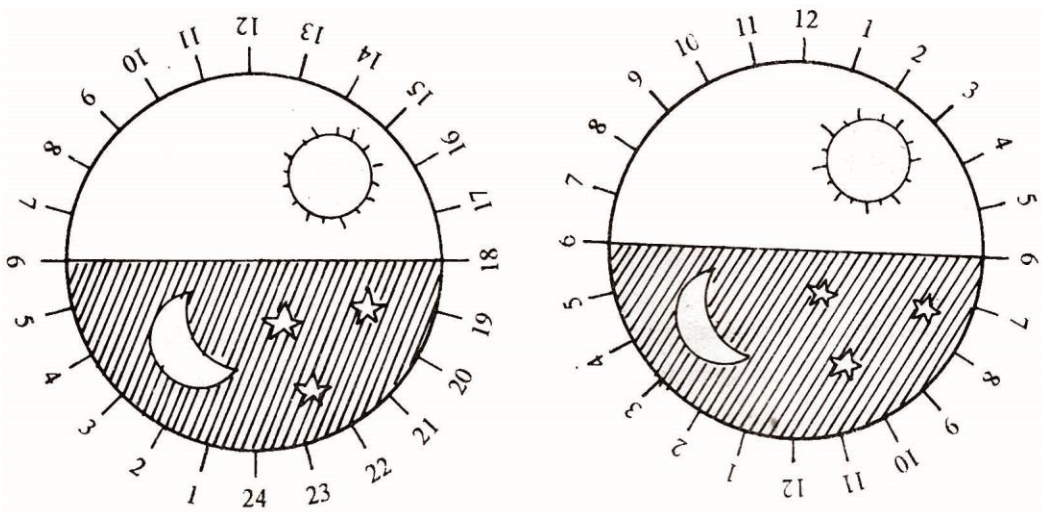
मैं – क्या तुम्हें पता है 4 बजकर तीस मिनट का समय सुबह भी आता है।

अब्दुल – हाँ, मेरी मम्मी इस समय उठ जाती है।

मैं – अगर हम शाम वाले समय के लिए ᵽ ;ᵽअमदपदहद्ध व सुबह वाले के लिए ड ;उवतदपदहद्ध लिखेंगे तो सुबह के लिए 4:30 ड व शाम के लिए 4:30 ᵽ होगा।

तुम्हें पता होगा कि रात 12 बजे से दोपहर 12 बजे के बीच घड़ी का छोटा कांटा एक पूरा चक्कर काट लेता है।

लेकिन हम सिर्फ घड़ी देखकर नहीं बता सकते कि उस समय सुबह है या शाम इस बात का पता हम दिन–रात देखकर लगाते हैं। अब मैं एक घड़ी इस तरह से काटती हूँ।



(क) (ख)

छायादार भाग रात बताता है और सफेद भाग दिन बताता है। इस घड़ी में एक ही कांटा चक्कर लगाता है यह कांटा जो टाइम बताएगा वहीं सही टाइम है चित्र ख में 1 से 12 लिखे है जो मध्यरात्रि 12 बजे से दोपहर 12 बजे तक का समय दर्शाते हैं। इसके बाद फिर से 1, 2 ...... 12 लिखे हैं जो दोपहर 12 से रात 12 का समय दर्शाते हैं।

अब हम एक ऐसी घड़ी बनाते हैं जिसमें 1, 2 ..... 12 तक होगे उसके बाद 1, 2 ..... पूनः लिखने की बजाय 13, 14 .... 24 तक लिखु। अब मैंने दोनों डिस्क को एक–दूसरे के ऊपर इस तरह से रखा कि उनके केन्द्र बिन्दु एक–दूसरे के ऊपर रहे। इसके जरिए मैंने समझाया कि 13 वास्तव में 1म से मेल खाता है। इसे 24 घण्टा घड़ी कहते हैं।

फिर मैंने उससे पूछा कि इस समय कितने बजे हैं?

अब्दुल : 18:00:00

इस प्रकार वह समझ गया कि समय को 24 घण्टे के पैमाने पर भी दिखाया जाता है।

प्रश्न : कक्षा 5 के बच्चों के लिए ऐसी ही अन्य गतिविधि सुझाइए जिससे सामान्य समय को 24 घंटे वाले समय में और 24 घंटे वाले समय को सामान्य समय में बदलने की क्षमता का विकास हो?

6.11.5 समय में सक्रियाएँ :

हम में से कई लोग समय की गणनाओं में भी अनजाने में दाशमिक प्रणाली लागु कर देते हैं। वास्तव में समय का मापन साठमिक ";मगंहमेपउंसद्ध प्रणाली के आधार पर होता है। यानी स्थानीय मान की क ऐसी प्रणाली जिसका आधार 60 हाता है। उदाहरण के लिए 1 घण्टा 45 मिनट और 2 घंटा 25 मिनट को कैसे जोड़े ?

घंटे मिनट

1	4 5
+ 2	2 5

मिनट को जोड़ने पर 70 आता है, जो 60 से ज्यादा है, तो इसको घण्टे–मिनट में बदलना चाहिए अर्थात् 1 घण्टा 10 मिनट। अब एक घंटा को घण्टे वाले कॉलम में ले जायेगें अर्थात् घंटे 3 + 1 = 4 हो जायेगें। अतः हल होगा 4 घंटे 10 मिनट।

प्रश्न : जब एक बच्चे को यह सवाल दिया गया :

''2 घण्टे 15 मिनट

–1 घण्टे 45 मिनट'' उसने जबाब दिया 1 घण्टा 15 मिनट। उसकी दिक्कत क्या है ? इस दिक्कत से निजात पाने में आप उसकी मदद कैसे करेंगें ?

संक्षेप में बच्चों में समय मापन के कौशल विकसित करने के लिए आपको कई प्रकार के क्रियाकलापों की योजना बनाने की आवश्यकता है।

6.12 आँकड़ों का प्रत्यय तथा प्रस्तुतीकरण–

गणित शिक्षण का एक महत्वपूर्ण क्षेत्र है आँकड़ो का एकत्रीकरण एवं प्रबंधन। हमारे दैनिक जीवन में कदम–कदम पर हमें किसी न किसी रूप मे कई प्रकार के आँकड़ों का सामना करना पड़ता है तथा उनका इस्तेमाल भी करना पड़ता है। जैसे किराने के दुकान के सामानों का रेटलिस्ट बोर्ड ले लीजिये। उसमें विभिन्न सामग्रियों की कीमत क्रम से लिखी हुई मिलेंगी या कपड़े की दुकान में कई प्रकार के कपड़ों की क्वालिटी और कीमत संबंधी आंकड़े दुकानदार आपको बताता है या विद्यालय में प्रत्येक कक्षा में प्रतिदिन बच्चों की उपस्थिति का रिकार्ड हो या परीक्षाफल का रिकार्ड हो, टीवी या समाचार पत्रों में विभिन्न शहरों का तापमान या वर्षा की मात्रा से संबन्धित जानकारी हो या खेल से संबन्धित रिकार्ड हो, ये सभी रिकार्ड या लिस्ट कुछ आँकड़ो को प्रदर्शित करते हैं। इन आँकड़ो को क्यों एकत्रित किया जाता है? इन आँकड़ों से हमें क्या मिलता है? क्या इस प्रकार के आँकड़ो से हमारी कुछ जरूरतों की पूर्ति होती है? हाँ, हमें आंकड़े एकत्रित करने की आवश्यकता है क्योंकि आंकड़े हमें कुछ जानकारी या सूचना उपलब्ध कराते हैं। आँकड़ो द्वारा उपलब्ध कराये गई जानकारी के आधार पर हम किसी चीज या घटना को बेहतर ढंग से समझ सकते हैं तथा उसके बारे में कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं। इन आँकड़ों के माध्यम से हम कुछ निष्कर्ष निकालते हैं जो हमारी समस्या की समाधान निकालने में सहायता करता है तथा कई तरह से हमारे लिए उपयोगी साबित होता है। जैसे–यदि विद्यालय में बच्चों की उपस्थिति कम है या किसी कक्षा की एक सप्ताह के दौरान बच्चों की औसत उपस्थिति ज्ञात करनी हो तो हमें इससे संबन्धित आंकड़े एकत्रित करने पड़ेंगे। इन एकत्रित आँकड़ों से वांछनीय जानकारी प्राप्त की जा सकती है। हमारे जीवन में आँकड़ो की महत्ता एवं उपयोगिता को देखते हुये प्राथमिक कक्षाओं से ही बच्चों को आंकड़ा एकत्रीकरण एवं आंकड़ा प्रबंधन की अवधारणा से परिचित कराना आवश्यक है।

इस उपभाग में हम आंकड़े एकत्रीकरण एवं उसके प्रबंधन के कुछ विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे।

आंकड़े क्या हैं?

आँकड़े अंको या संख्याओं या राशियों का संग्रह होता है जो किसी एक कार्य या चीज या घटना से संबन्धित होता है। नीचे एक सारणी में सब्जियों के मूल्य रुपयों में दिया हुआ है जो सब्जियों से संबन्धित आँकड़े है।

सब्जियों के मूल्य	10–06–2014
सब्जियाँ	**1 किलोग्राम का मूल्य**
आलू	20 रू०
प्याज	25 रू०
टमाटर	20 रू०
बैगन	16 रू०
लौकी	15 रू०
भिन्डी	24 रू०
कटहल	26 रू०
गोभी	40 रू०

सब्जियों की कीमत संबंधी आंकड़े

निम्न सारणी मे दिल्ली में एक सप्ताह मे रेकार्ड किए गए विभिन्न दिनों का तापमान को प्रदर्शित कर रहा है–

तिथि	उच्चतम तापमान डिग्री में	निम्नतम तापमान डिग्री में
09–06.2014	42	29
10–06.2014	41	27
11–06.2014	43	28
12–06.2014	40	25
13–06.2014	43	29
14–06.2014	44	30

उपरोक्त दोनों सारणियों के आँकड़ो में संख्याओं का समावेश है (मापन इकाई अलग अलग है)। तापमान से संबन्धित आँकड़ो को एकत्रित करने में 6 दिन लगे। वही सब्जियों की कीमत प्रति किलोग्राम एक निश्चित तिथि के अनुसार प्रदर्शित है।

आँकड़ों का एकत्रीकरण एवं स्रोत–

हमें दैनिक जीवन में अनेक प्रकार की जानकारी या सूचनाओं की आवश्यकता होती है जिसे हम विभिन्न माध्यम से प्राप्त करते हैं, जैसे–किसी रेल का प्रस्थान या आगमन समय की जानकारी चाहिए तो हम यह जानकारी रेलवे की समय–सारणी में एकत्रित आँकड़ो से प्राप्त हो सकता है। हमारी जरूरतों या समस्या के आधार पर हम आंकड़े एकत्रित करते हैं या सूचना एकत्रित करते हैं। आंकड़े समस्या से संबन्धित स्रोत से एकत्रित किए जाते हैं। कुछ आंकड़ो का एकत्रीकरण आवश्यकतानुसार एक बार करना पड़ता है, जबकि कुछ आँकड़ो का एकत्रीकरण कई बार करना पड़ता है। जैसे–कक्षा चतुर्थ के सभी विद्यार्थियों का वजन और ऊँचाई ज्ञात करना है, तो ये आंकड़े कक्षा चतुर्थ के सभी बच्चों का वजन तौलकर प्राप्त किए जा सकते हैं। यदि हम 1 वर्ष पश्चात, इन बच्चों की वजन और ऊंचाई में वृद्धि की जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं तो

इन सभी बच्चों का वजन और ऊँचाई की माप 1 वर्ष बाद हमें पुनः एकत्रित करनी पड़ेगी। तभी हम बच्चों की वजन और ऊँचाई में वृद्धि की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

बच्चों को कक्षा के सभी बच्चों का जन्मदिन एकत्रित करने के लिए कहें तथा उन्हे इन एकत्रित आँकड़ो से यह पता लगाने के लिए कहें कि किस वर्ष में सबसे अधिक बच्चों का जन्म हुआ या किस महीने में सबसे अधिक बच्चों की जन्मतिथि है या किन–किन बच्चों की जन्मतिथि समान है।

आँकड़ों का प्रबंधन –

एकत्रित आँकड़े सदैव व्यवस्थित नहीं होते हैं। अव्यवस्थित आँकड़ो से सूचना प्राप्त करना कठिन होता है इसलिए आँकड़ो से आसानी से सूचना प्राप्त करने के लिए हमें आँकड़ों को क्रम से व्यवस्थित करना पड़ता है। आँकड़ों को सारणीबद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण–

मान लो, इकाई परीक्षा में गणित विषय में 15 बच्चों के प्राप्तांक (अधिकतम अंक 10) निम्न हैं–

4, 6, 9, 3, 5, 7, 4, 6, 5, 6, 4, 5, 8, 6, 7

उपरोक्त आँकड़ों को देखकर आसानी पता नहीं लगाया जा सकता है कि कितने बच्चों के अंक समान है तथा सबसे अधिक बच्चों ने कितने अंक प्राप्त किए हैं। यदि इन आँकड़ों को हम बढ़ते क्रम में लिखते हैं, तो हमें आंकड़े निम्न रूप में दिखाई देंगे–

3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9

अब इस आँकड़े को देखने से हम उपरोक्त प्रश्नो का उत्तर आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। आँकड़ो को क्रमबद्ध रूप मे व्यवस्थित करने से सूचना आसानी से प्राप्त की जा सकती है।

क्रियाकलापः

कक्षा चतुर्थ के विद्यार्थी एक सैर (Picnic) पर जाने की तैयारी कर रहें हैं। शिक्षक ने बच्चों से चार फलों केला, सेब, आम और पपीता में से एक फल चुनने को कहा इसकी सूची बनाने का कार्य रीतू को सौंपा गया। उसने सभी बच्चों की एक सूची बनाई और प्रत्येक नाम के सामने उसके द्वारा चुना हुआ फल इस प्रकार लिख दिया–

अनुराधा	–	केला
फातिमा	–	आम
मनोज	–	पपीता
जावेद	–	सेब
रितू	–	आम

ये सारणी ही हमें आँकड़े उपलब्ध कराती है। इस प्रकार एकत्रित की गई सूचनाऐं आँकड़े (Data) कहलाती है। बच्चे आँकड़ा का मतलब समझ पायें, इसके लिए उनके घर, गाँव तथा विद्यालय से संबंधित विभिन्न तरह के आँकड़े इकठ्ठा करने का मौका देना होगा। बच्चों के दैनिक जीवन से संबंधित निम्नलिखित आँकड़ो को इकठ्ठा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए –

- विभिन्न टूथपेस्टों के नाम जो आपके कक्षा के बच्चे प्रयोग करते हों।
- आपके कक्षा के विभिन्न महीनों में जन्म लेने वाले बच्चों की संख्या।

- विभिन्न साबुनों के नाम, जो आपके कक्षा के बच्चे प्रयोग करते हों।
- किसी बच्चे के चार दोस्तों के भाई और बहनों की संख्या।
- आपके कक्षा के एक सप्ताह में अनुपस्थित बच्चों की संख्या।
- विद्यालय के विभिन्न कक्षाओं में बच्चों की संख्या।
- कक्षा में विभिन्न बच्चों का पसंदीद खेलों का नाम।
- बच्चों द्वारा पसन्द किए जाने वाली मिठाईयों के नाम आदि।

यों तो आँकड़े इक्ठ्ठा करना बच्चों के लिए मनोरंजक गतिविधि होता है, पर उसकी पूरी उपयोगिता तभी है जब आँकड़ो पर चर्चा की जाय। आँकड़ो का संग्रह, और उसे सजाने से बच्चे अपने अनुभवों को संगठित कर पाते हैं, तथा उनसे निष्कर्ष तक पहुँचने में बच्चों को सहायता मिलती है।

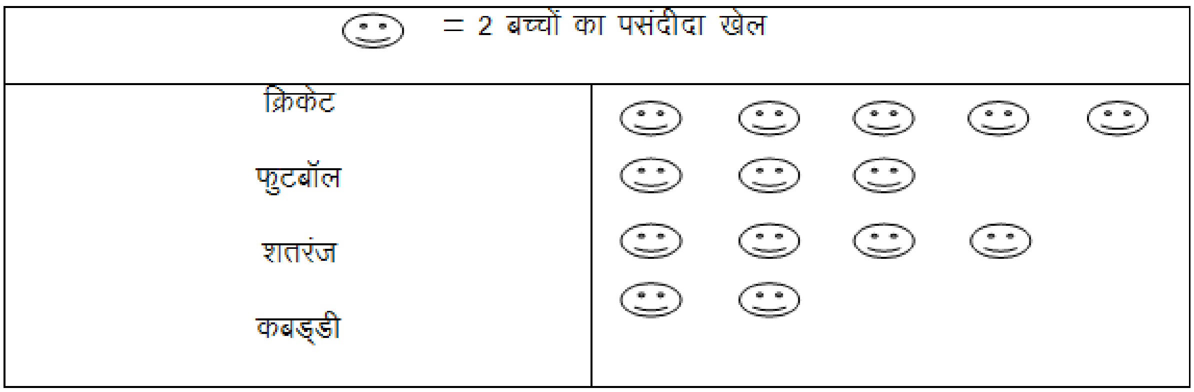
आँकड़ो का प्रस्तुतीकरण एवं विश्लेषण –
आँकड़ो के एकत्रीकरण तथा व्यवस्थिकरण के पश्चात आँकड़ो का विश्लेषण करना भी जरूरी है। विश्लेषण करके हम विभिन्न प्रकार की जानकारी आँकड़ो से प्राप्त कर सकते हैं। विश्लेषण करने का अर्थ है आँकड़ो का सूक्ष्मता के साथ अध्ययन करना तथा सुस्पष्ट और सटीक जानकारी प्राप्त करना। उपरोक्त उदाहरणों से कई जानकारी एकत्रित की जा सकती है, जैसे–सब्जी की कीमत के आँकड़ो से सबसे महंगी और सबसे सस्ती सब्जी का दाम ज्ञात किया जा सकता है या किन सब्जियों के दाम मे कम अंतर है? सीजन की कौन–कौन सी सब्जी उपलब्ध है, आदि जानकारी प्राप्त की जा सकती है। बच्चों को उनके द्वारा एकत्रित आंकड़ो से अधिकतम सूचना या जानकारी प्राप्त करने के लिए प्रेरित करने की अवश्यकता है ताकि वे गहन रूप से एकत्रित आँकड़ों का विश्लेषण करने की कुशलता अर्जित कर सकें।

यहाँ बच्चे न सिर्फ आँकड़ो का विश्लेषण करते हैं, बल्कि आँकड़ो की प्रस्तुति पर भी अपनी समझ बना लेते हैं। प्रायः हमें उपलब्ध आँकड़े असंगठित रूप में प्राप्त होते हैं, जिन्हें यथाप्राप्त आँकड़े (Raw Data) कहा जाता है। इसे बढ़ते या घटते क्रम में लगाने पर संगठित आँकड़े कहलाते हैं। आँकड़ो को क्रमबद्ध रूप में संगठित करने का अभ्यास बच्चों में गतिविधियों के माध्यम से की जानी चाहिए। सबसे पहले आँकडो का अधिकतम तथा न्यूनतम मान बताने को कहें, फिर अनुक्रम (Ordering) का अभ्यास कराएं आँकड़ो के अधिकतम मान तथा न्यूनतम मान के अन्तर को आँकड़ो का परिसर (Range) कहा जाता है। कक्षा अध्यापिका सुश्री वीणा चाहती थी कि उनके बच्चे आँकड़ो के आधार पर स्वयं निष्कर्ष तक पहुँचे। इसके लिए उसने एक तालिका बनाई, जो बच्चों के पसंदीदा खेल से संबंधित था। फिर उसने बच्चे द्वारा अपने मित्र से पूछकर तालिका को भरने की गतिविधि कराई :

पसंदीदा खेल	प्रत्येक बच्चे की पसन्द (मिलान चिन्ह्)	बच्चों की कुल संख्या (बारंबारता)
क्रिकेट	~~||||~~ ~~||||~~	10
फुटबॉल	~~||||~~ |	6
शतरंज	~~||||~~ |||	8
कबड्डी	||||	4

वह जानती है कि जब बच्चे स्वयं अपने मित्र से पूछकर सारणी में मिलान चिन्ह् (Tally Mark) लगाते हैं, तो इसकी समझ और बारम्बारता की समझ स्वयं बना लेते हैं। अतः इसका मौका बच्चे को अधिक से अधिक देना चाहिए। उपर्युक्त सारणी बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency distribution table) कहलाती है। यह बात भी बच्चे समझ पाते हैं।

सुश्री वीणा मानती है कि जब बच्चे आँकड़ो का सारणी बनाये तब उसे चित्रालेख (Pictograph) में भी प्रदर्शित करना चाहिए। एक चित्रालेख आँकड़ो को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप (आलेखीय रूप) निरूपित करता है। यहाँ उपर्युक्त आँकड़ो को भिन्न चित्रालेख द्वारा निरूपित किया गया है।



शिक्षिका बच्चों को चित्रालेख की व्याख्या के लिए प्रोत्साहित करती है। इसके लिए वह एक या दो प्रासंगिक प्रश्न पूछती है। जैस–चित्रालेख आपको क्या बताता है? एक संकेत कितनी वस्तुओं को निरूपित करता है?

गतिविधियाँ :
अब आप अपने कक्षा के बच्चों के परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित आँकड़े (सूचनाऐं) एकत्रित कीजिए। उन्हें निम्न सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।

परिवार के सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	बारंबारता

अब निम्न प्रश्नों का हल ढुंढिए :–
1) कौन–सी संख्या न्यूनतम बार आती है।
2) कौन–सी संख्या अधिकतम बार आती है।
3) इस आँकड़े का परिसर क्या है ?
4) कौन–सी संख्याऐं बराबर बार आती है।
5) क्या इन आँकड़ो को चित्रालेख द्वारा दिखाया जा सकता है ?

6.13 सारां”I

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् मापन का अर्थ एवं उसकी आवश्यकता की समझ विकसित तो की ही है, साथ ही अमानक एवं मानक इकाईयों की उपादेयता एवं इनके उपयोग से मापन के तरीकों पर भी चर्चा की। इतना ही नहीं हमने यह भी जाना कि अपने परिवेश की विभिन्न त्रिविमीय चीजों के साथ बच्चों को बचपन में हुए अनुभवों का उपयोग उन्हें साइज का एहसास देने के लिए किया जा सकता है। हमने यह भी जाना कि शुरूआत में बच्चों को मापन की भौतिक इकाईयों (स्थानीय अमानक इकाईयों) के उपयोग का प्रशिक्षण दिया जा सकता है। इसके लिए बित्ता, कदम, हाथ, पैर इत्यादि का उपयोग लंबाई मापन तथा कटोरा, गिलास का उपयोग धारिता मापन के लिए किया जा सकता है। किन्तु इन अमानक इकाईयों के प्रयोग से मापन का परिणाम भिन्न–भिन्न हो सकता है। अतः एक मानक परिणाम प्राप्त करने हेतु हमें मानक इकाईयों की जरूरत पड़ती है। आँकड़ा का अर्थ है – एकत्रित की गई सूचनाएँ अथवा सूचनाओं का मात्रांकन। आँकड़ो को चित्रात्मक रूप में प्रस्तुत करके परिणामों की जानकारी करना आसान होता है। हमने इस इकाई के माध्यम से मानक इकाईयों के उपयोग से लंबाई, भार, धारिता, समय आदि के मापन की समझ विकसित की। इतना ही नहीं हमने इस इकाई में आँकड़ों के संग्रहण एवं इसकी प्रस्तुत की विधियों आदि की जानकारी प्राप्त की जिससे हम अपने वर्ग–विनिमयन को प्रभावी बना सकें।

6.14 स्वमूल्यांकन

1. ''जीवन के हर क्षेत्र में मापन की आवश्यकता है।'' इस कथन से आप कहाँ तक सहमत हैं, स्पष्ट करें।
2. तीसरी कक्षा के बच्चे को लंबाई की अवधारणा विकसित करने के लिए आप क्या करेंगे?
3. तुलना मापन की पहली क्रिया है– इस कथन को स्पष्ट करें।
4. अमानक इकाईयाँ बच्चों में मापन की अवधारणा स्पष्ट करने में किस प्रकार सहायक है? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट करें।
5. अमानक इकाईयों के आधार पर आप मानक इकाईयों की समझ कैसे विकसित करेंगे? आप बच्चों को कैसे विश्वास दिला पाएँगे कि मापन में अमानक इकाईयाँ अपर्याप्त है?
6. मानक इकाईयाँ ही मान के लिए सटीक इकाईयाँ हैं? इसे आप कैसे स्पष्ट करेंगे?
7. आप कैसे जाँचेंगे कि बच्चे को भार की अवधारणा समझ में आ गई है?
8. आपके परिवेश में लोग लम्बाई मापने के लिए कौन–2 से अमानक इकाई का प्रयोग करते हैं। सूची बनाएं। इनके प्रयोग से उन्हें कौन–2 सी कठिनाइयाँ होती है।
9. लम्बाई मापन में शुद्धता के लिए कौन–2 आवश्यक सावधानियाँ बरतेंगे?
10. जब बच्चे तराजू का उपयोग स्वयं करते हैं, तो उससे उन्हें कौन–2 से अनुभव प्राप्त होते हैं?
11. बच्चों में धारिता की समझ विकसित करने के लिए एक गतिविधि बनाइए।
12. घड़ी की सहायता से आप समय की अवधारणा कैसे विकसित करेगें?
13. आप कुछ प्रश्नों की सूची बनायें, जिससे जाना जा सकें कि बच्चे समय की आवधारणा को समझते हैं।
14. मुद्रा की पहचान और उसके मूल्य की समझ हेतु बच्चों के लिए एक गतिविधि बनाइए तथा बतायें कि यह कैसे उपयोगी होगा।
15. आँकड़ों का एकत्र करना क्यों जरूरी है? अपने आसपास एकत्र किये जा सकने वाले आँकड़ों की सूची तैयार कीजिए।
16. आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण का क्या महत्व है? उदाहरण सहित चर्चा कीजिए।

इकाई–7

गणित में सीखने की योजना, संसाधन और आकलन

संरचना

7.1 परिचय
7.2 सीखने के उददे्”य
7.3 सीखने की योजना– लर्निंग प्लान
7.3.1 योजना क्यों बनाएं
7.3.2 योजना कैसे बनाएं
7.3.3 इकाई की योजना
7.3.4 पाठ की योजना
7.4 शिक्षण अधिगम गतिविधियाँ तथा सामग्री
7.4.1 ठोस वस्तुओं का शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में उपयोग करना
7.4.2 गणित सबंधी विविध शिक्षण अधिगम सामग्रियां
7.4.3 विद्यालय प्रांगणः शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में
7.4.4 सीखने के संसाधन के रूप में गणित की पाठ्य–पुस्तक
7.4.5 गणित कोना एवं गणित प्रयोग”ााला
7.5 मनोरंजक गणितः गणितीय खेल एवं पहेलियाँ
7.5.1 खेलकर सीखना
7.5.2 गणितीय खेल
7.5.3 गणितीय पहेलियां
7.6 गणित के सन्दर्भ में अधिगम का आकलन
7.6.1 मूल्यांकन के लिए समय निर्धारण
7.6.2 बच्चों की भागीदारी के आधार पर मूल्यांकन के प्रकार
7.6.3 मूल्यांकन की प्रक्रिया
7.6.4 कक्षा कक्ष में प्रयोग में लायी जाने वाली आकलन की कुछ प्रविधियाँ
7.7 प्राथमिक स्तर पर गणित के संदर्भ में सतत् व व्यापक मूल्यांकन
7.8 संदर्भ सूची
7.9 स्वमूल्यांकन

7.1 परिचय

बच्चों को सीखने के लिए ठोस अनुभवों तथा सार्थक संदर्भों की आवश्यकता होती है। बच्चे खेल के माध्यम से एवं विषय–वस्तु को परिवेश से जोड़कर सीखते हैं। सीखना बच्चों के लिए एक तरह से वस्तु के विषय में समझ बनाना है। उन्होंने जो कुछ भी सीखा है, उसी को आधार बनाकर अपनी समझ को आगे बढ़ाते हैं। इस प्रकार अपने हर अनुभव से सीखने की क्रिया में कुछ–न–कुछ जोड़ते चले जाते हैं। बच्चे कितना व किस तरह सीखे है, इसे जानने के लिए ही उनका मूल्यांकन किया जाता है। बच्चो ने किस अवधारणा को किस सीमा तक समझा है? क्या बच्चा सीखी गई अवधारणा का दैनिक जीवन की समस्याओं के समाधान में उपयोग कर पाता है? यह सब जानने हेतु ही बच्चो का मूल्यांकन आवश्यक है। शिक्षक द्वारा बनायी गई पाठ तथा इकाई योजना एवं उसके द्वारा अपनायी गई शिक्षण विधियां किस सीमा तक अधिगम उददेश्यों की प्राप्ति में किस हद तक सहायक रही, यह जानना अति आवश्यक है। साथ ही साथ बच्चो के अधिगम स्तर में सुधार हेतु करना इत्यादि मूल्यांकन द्वारा ही संभव है। अवलोकन, समवाय समूह, परियोजना कार्य तथा औपचारिक बातचीत के जरिए इन सभी पक्षों का मूल्यांकन किया जा सकता है तथा मूल्यांकन द्वारा प्राप्त जानकारी का शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के उददेश्यों की प्राप्ति का उपयोग कर सकते है।

इस इकाई में हम सतत एवं व्यापक मूल्यांकन, गणित के संदर्भ में अधिगम का आकलन, अवधारणाओं के सिखाने में शिक्षण अधिगम सामग्री का उपयोग तथा आकलन की कुछ प्रविधियों के बारे में जानेंगे।

7.2 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- बच्चों के गणितीय अवधारणा या कौशल सिखाने हेतु शिक्षण अनुभवों की रचना करते समय ध्यान में रखने योग्य बातों की सूची बना सकेगें।
- स्तर विशेष पर गणित की किसी विशेष अवधारणा को सिखाने के लिए सीखने की योजना बना सकेगें तथा उसका प्रयोग भी कर सकेगें।
- अवधारणाओं को सिखाने हेतु शिक्षण अधिगम सामग्री एवं विभिन्न गणितीय खेलों का उपयोग कर सकेंगे।
- गणित में सिखाने की अपनी विधियों एवं बच्चो की समझ के स्तर का मूल्यांकन कर सकेगें।
- गणित अधिगम के संदर्भ में आकलन की व्याख्या कर सकेंगे।
- गणित की बाल केन्द्रित प्रणाली में आकलन को सुनिश्चित करने के उपाय ढूंढ़ सकेगें।
- गणित में सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन को समझ सकेंगे।

7.3 सीखने की योजना– लर्निंग प्लान

जैसा कि हम जानते ही है कि दैनिक जीवन में हमारा सामना गणित से होता रहता है तथा एक छोटा बच्चा भी उसे देखता और महसूस करता है। माता–पिता उसे इसमें छिपी गणित को खेलों के माध्यम से समझाने का प्रयास भी करते हैं। इसी कारण बच्चों के पास गणित से संबंधित परिवेश से प्राप्त कुछ अनुभव होते हैं। शिक्षक होने के नाते हम यह जानते हैं कि बच्चे गणित कैसे सीखते हैं और उनके गणित सीखने की प्रक्रिया को आनंददायी और सार्थक कैसे बनाया जा सकता है? साथ ही साथ मूल्यांकन हेतु परीक्षा के उपयोग की भी जानकारी होती है।

प्रश्न : एक चार साल का बच्चा स्कूल आने से पहले गणित से संबंधित क्या–क्या जानकारियाँ रखता है? उसकी सूची बनाइए।

आइए, एक उदाहरण लें। एक मिठाईवाला मिठाई तैयार करने से पहले किन–किन बातों पर विचार करता हैं? वह देखता है कि उसके पास नित्य कितने ग्राहक आते हैं? वे कौन–कौन सी मिठाइयाँ पसंद करते हैं? उनको बनाने के लिए कौन–कौन सी सामग्री की आवश्यकता होगी? उनकी मात्रा क्या होगी ? उनको बनाने की कौन–कौन सी विधियाँ होंगी? बनाने का क्रम क्या होगा? इसके आधार पर खर्च क्या आयेगा? श्रम कितना लगेगा? इसके आधार पर मिठाईवाला अपने लाभ को देखते हुए मिठाइयों का मूल्य तय करेगा और ग्राहकों को बेचेगा।

निष्कर्ष है कि मिठाई बनाने से बेचने तक की सारी क्रियाओं के लिए एक मिठाईवाले को एक योजना बनानी पड़ेगी, तभी वह सफलतापूर्वक मिठाई की दुकान का संचालन कर सकता है तथा अपनी मिठाई की दुकान खोलने के उददेश्य की प्राप्ति कर सकता है।

प्रश्न : पान वाला पान बनाने से पहले किस–किस तरह की बातों पर विचार करता है? उसे सूचीबद्ध कीजिए। पान वाले के उदाहरण को आप बच्चे की गणित सीखने की क्षमता से किस तरह जोड़ पाएँगे?

7.3.1 योजना क्यों बनाएं?

बच्चे अच्छे ढग से तभी सीखते हैं, जब पाठ को इस ढंग से सावधानी पूर्वक व्यवस्थित किया जाए कि सीखने की क्रिया दिलचस्प बने। ऐसे सवालों से उन्हें सीखने में मदद मिलती है जो उन्हें सोचने के लिए प्रेरित करें। इसके अलावा ऐसी सामग्री और गतिविधियों का इस्तेमाल उपयोगी होता है जिनसे बच्चों की समझ विकसित हों और अभ्यास का मौका मिले। दूसरी ओर आपको कक्षा की सच्चाइयों का भी सामना भी करना होता है। इन सच्चाइयों में सामाजिक, आर्थिक और ढांचागत भिन्नताओं के अलावा पाठ्यवस्तु को लागू करने और मूल्यांकन से जुड़े मुद्दे भी शामिल हैं। इसलिए, अगर आप योजना के महत्व को स्वीकार करके उन्हें लागू करना चाहेंगे, तो हो सकता है कि आपके सामने नीचे दिए गए कुछ सवाल खड़े हों जाएं :–

- अगर मैं चाहूं कि बच्चे वास्तव में सीखे तो सिलेबस (syllabus) कैसे पूरा होगा?
- अगर पाठ्यपुस्तक के मुताबिक चलना है तो गणित सीखने के सिद्धातों का पालन कैसे करूंगा?
- अगर बच्चों की भागीदारी बढ़ाऊं, तो कक्षा में शोरगुल कैसे रोकूं ?
- जब स्कूल में इतने कम साधन हैं, तो बच्चों के लिए ठोस चीज़ों का बन्दोबस्त कैसे करूंगा?
- बच्चों के विकास की जरूरतों में इतना अन्तर है; तो सब बच्चों की जरूरतें कैसे पूरी करूंगा?
- मुझे कैसे पता चले कि मेरा सिखाने का तरीका कारगर है और सही?

इनमें से ज्य़ादातर सवालों से निपटा जा सकता है, बशर्ते कि आप अपने पाठ्यक्रम की, उसे लागू करने की और मूल्यांकन प्रक्रिया की योजना बना लें। आप कहेंगे कि योजना बनाना तो ठीक है, लेकिन कई बार ऐसी बातें सामने आ जाती है जिन पर हमारा कोई काबू नहीं रहता। जैसे कि अचानक होने वाली छुट्टियाँ, बच्चों की बीमारी, फसल कटाई की वजह से बच्चों की गैर हाजरी, वगैरह। सही है, योजना और असलियत के बीच अक्सर अन्तर पड़ जाता है। लेकिन आप इस अन्तर से भी फायदा उठा सकते हैं । आप इनको नोट करें, इसके बारे में सोचें कि ऐसा क्यों हुआ, और तब अपने निष्कर्षों को दर्ज कर लें। दरअसल यह सब योजना बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा है। इससे हमें बच्चों के साथ अपने कामकाज को व्यवस्थित करने में मदद मिलती है, जिससे उन्हें सीखने में बढ़ावा मिलता है। ऐसा करने से हमें इस बात पर भी ग़ौर करने का मौका मिलता है कि हम क्या कर रहे हैं? इस तरह से सामान्यतः हमारी सिखाने की क्षमता बेहतर हो जाती है।

कक्षा में जो परिस्थितियां हो सकती हैं और होती हैं, उनसे निपटने का कोई एक ही तरीका नहीं है। हर बार जब हम समस्या से निपटने का कोई तरीका अपनाते हैं और बाद में उन तरीके को चुनने के कारणों पर ग़ौर करते हैं, तो इससे सामूहिक सोच की हमारी क्षमता बेहतर बनती है।

प्रश्न : निम्नलिखित में सेयोजना बनाने के अच्छे कारण कौन–कौन से है?

क) योजना बनाने से लक्ष्यों को स्पष्ट करने में मदद मिलती है।

ख) योजना बनाने से सुनिश्चित हो जाता हैं कि विषय वस्तु के सारे जरूरी पहलू शामिल कर लिए गए हैं।

ग) योजना बनाने से समय को जरूरत के मुताबिक बांटा जा सकता है।

घ) योजना बनाने से सीखने के लिए जरूरी अनुभवों को क्रमबद्ध करने में मदद मिलती है।

ड) योजना बनाने से बच्चों की दिलचस्पी व ध्यान लगाए रखने में मदद मिलती हैं।

च) योजना बनाने से गैर–जरूरी दोहराव से बचा जा सकता है और अभ्यास के लिए जरूरी दोहराव कराया जा सकता है।

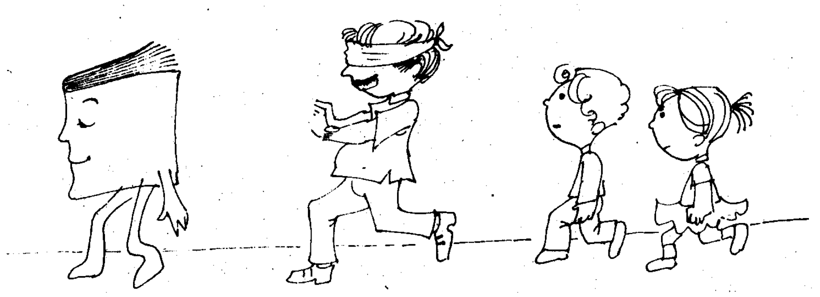
छ) योजना बनाने से शिक्षक का आत्म विश्वास बढ़ता है और उसे अपने काम से खुशी मिलती है।

प्रश्न : क्या आप पाठ्यक्रम योजना बनाने के लिए ऊपर दिए गए कारणों के अलावा कोई और कारण सोच सकते हैं?

अभी तक हमने यह चर्चा की कि शिक्षण योजना बनाने की जरूरत क्या है? आइए अब देखें कि योजना कैसे बनाई जा सकती है?

7.3.2 योजना कैसे बनाएं?

मान लीजिए कि आप से कक्षा 3 को गणित पढ़ाने के लिए कहा जाता है। आप उनको गणित किस तरह पढ़ाएंगे? एक तरीका तो यह होगा कि आप कक्षा 3 की गणित की पाठ्य–पुस्तक उठा लें और आंख मूंदकर एक–एक अध्याय पढ़ाना शुरू कर दें।



चित्र 1 : शिक्षक आंख मूंदकर पाठ्य–पुस्तक का अनुकरण करते हुए।

अगर ऐसा है तो आपके प्रमुख उद्देश्य होंगे :

क) पाठ्य–पुस्तक को पूरा करना। मतलब यह हुआ कि पाठ्य–पुस्तक को ही आप पाठ्यक्रम के बराबर मान रहे हैं। आम तौर पर यही होता भी है क्योंकि शिक्षक के पास पाठ्य–पुस्तक के अलावा कोई और शिक्षण का साधन नहीं होता।

ख) साल के आख़िर में बच्चों का मूल्यांकन करके यह पता लगाना कि पाठ्य–पुस्तक की कितनी विषयवस्तु उन्हें याद है।

ज्यादातर शिक्षक इन्हीं तरीकों को अपनाते है। इसके लिए योजना बनाने की जरूरत न के बराबर होती है। वे यह मानकर चलते हैं कि हर किस्म की कक्षा व स्कूल के सभी शिक्षकों के लिए और हर तरह के बच्चों के लिए पाठ्य–पुस्तक में दी गई योजना उचित है। इस तरह के तरीके में योजना बनाने से सम्बंधित सारे मुद्दों, जैसे सिखाने के तरीके, अवधारणाओं को क्रमबद्ध करने और उन्हें सिखाने के लिए समय तय करने, आदि का पका–पकाया उत्तर मिल जाता है क्योंकि–

- इसके तहत् गणित की अवधारणाएं/विषय एक निर्धारित क्रम में पढ़ाए जाने हैं (शिक्षक के सिर्फ पृष्ठ–दर–पृष्ठ पाठ्य–पुस्तक का पालन करना है)।
- सिखाने का तरीका सिर्फ बच्चों से किताब में दिए सूत्र, उदाहरण और अभ्यास के सवालों को हल कराना रह जाता है।
- समय विभाजन का आधार आम तौर पर यह हो जाता है कि कुल अध्यायों की संख्या को स्कूल खुला रहने के कुल महीनों से भाग दे दिया जाए। जिससे यह तय हो जाता है कि एक महीनें में कितने अध्याय पूरे करने हैं।

प्रश्न : क्या इस तरीके से गणित शिक्षण के किसी भी सिद्धांत का पालन हुआ है ? अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

पाठ्य–पुस्तक से पढ़ाने का दूसरा तरीका यह हो सकता है कि आप खुद पहले इसको पढ़ लें और फिर गणित सीखने के सिद्धातों के मुताबिक हर पाठ की योजना ध्यान से बनाएं। इसके लिए जरूरी होगा कि आप सावधानी से हर पाठ को देखकर ऐसी योजना बनाएं जिसके मुताबिक–

i) **पढ़ाने का क्रम बच्चों के विकास स्तर से मेल खाता हो**। ज़्यादातर मामलों में इसका मतलब यह होता है कि पाठ्य–पुस्तक की पूरी सामग्री को नए क्रम में जमाया जाए। मिसाल के तौर पर, ज्यादातर पाठ्य–पुस्तकों के हिसाब से जोड़–घटा जैसी क्रियाएं सिखाने से पहले बच्चों को 1 से 100 तक की संख्याएं सिखानी चाहिए। लेकिन वास्तव में बच्चे 100 तक की संख्याओं के नाम याद करने से बहुत पहले ही जोड़–घटा की कुछ समझ बना चुके होते हैं। दरअसल जोड़–घटा के माध्यम से उन्हें अलग–अलग आकार (साइज) के समूहों की आपसी तुलना करने में और संख्या की कुछ समझ बनाने में मदद मिलती है। इनसे गिनती के अभ्यास का भी एक बढ़िया संदर्भ बनता है। इसलिए बेहतर होगा कि जब बच्चों में छोटी संख्याओं की समझ बन जाए, तब ही अंकगणित की आसान क्रियाएं सिखाई जाएं। सौ तक की संख्याएं सीखने का काम धीरे–धीरे चलता रह सकता है।

ii) **बच्चों को सीखन के ऐसे मौके मिलें जिनके जरिये वे गणितीय अवधारणाओं की अपनी एक समझ बना सके।** जैसे कि कक्षा 1 के बच्चों को ऐसे इबारती सवाल दिए जा सकते हैं जिनका जवाब देने के लिए उन्हें जोड़, घटा और शायद गुणा, भाग का उपयोग करना पड़े। इससे बच्चों को अपनी समझ बनाने के बहुत मौके मिलते है। साथ–साथ, बच्चे जो कुछ अपनी तार्किक सोच से समझ गए हों, उसे व्यक्त जरूर करें। उन्हें सही जवाब जल्द से जल्द ढूंढने के लिए मजबूर नहीं करना चाहिए। उचित प्रश्न पूछ कर आप उन्हें धीरे–धीरे जवाब की ओर ले जा सकते हैं। अर्थात् बच्चों में अमूर्त अवधारणाओं का विकास मूर्त उदाहरणों की सहायता से करें।

iii) **बच्चे जो कुछ पहले से जानते हैं, उसे आधार मानकर आगे बढ़ा जाए।** उदाहरण के लिए, बच्चे ठोस रूप में भिन्न संख्याएं (fractions) कुछ हद तक समझते हैं। हालांकि

हो सकता है कि प्रतीकों के रूप में भिन्नों से उनका पाला न पड़ा हो। तब भिन्न सिखाने के लिए उनकी इस समझ का इस्तेमाल क्यों न किया जाए? ठोस शैली का इस्तेमाल करने से बच्चे जो कुछ जानते हैं, उसे सामने लाने में मदद मिलेगी। इसके बाद प्रतीकों से कड़ी जोड़ी जा सकती है।

iv) **किसी गणितीय अवधारणा को लिखित रूप में सीखने से पहले और सीखने के दौरान बच्चों को उसके बारे में बोलने के मौके मिलें।** लिखित (प्रतीकात्मक) से सम्बंध जोड़ने से पहले बच्चों को मौका मिलना चाहिए कि वे गणितीय अवधारणाओं को मौखिक व ठोस रूप में समझ सकें। इससे उनकी गणितीय समझ बेहतर होगी और वे सूत्रों को आंख मूंद कर लागू करने से बच जाऐंगे।

ऊपर हमने जिन बातों पर चर्चा की है उनका निष्कर्ष यह निकलता है कि हमें योजना कुछ इस तरह बनानी होगी कि बच्चों की गणितीय सोच व कौशलों को विकसित करने में मदद कर सके। इसके लिए उन्हें सीखनें के ठोस अनुभवों की जरूरत है, न कि प्रतीकों के साथ ज़्यादा माथापच्ची करने की। इसका मतलब है कि सिर्फ पाठ्य–पुस्तक होती पर निर्भर रहने से काम नहीं चलेगा।

प्रश्न : क्या यह मुमकिन है कि सिर्फ पाठ्य–पुस्तक का इस्तेमाल किया जाए और फिर भी गणित शिक्षण की योजना गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार बनाई जाए? उदाहरण सहित जवाब दीजिए।

आंख मूंदकर पाठ्य–पुस्तक की लीक पर चलने से बचने का एक पक्का तरीका यह होगा कि इकाई व पाठ योजना बनाई जाए। एक इकाई का मतलब किसी एक विषय या एक अध्याय से होता है। इकाई को एक या ज्यादा पाठों में बांटा जाता है। जैसे, 'भिन्न' एक इकाई होगी और इस इकाई में एक पाठ 'आधे' की अवधारणा पर हो सकता है, इस पाठ अलग–अलग तरह की भिन्नों पर, एक पाठ भिन्नों के जोड़ पर, वगैरह। यानी, एक इकाई में एक या ज्यादा पाठ हो सकते है और एक साल में कई इकाइयाँ पढ़ाई जाएंगी। इस तरह के विभाजन का हम शिक्षकों के लिए क्या महत्व है ? आइए देखें।

7.3.3 इकाई की योजना

गणित की किसी नई इकाई को पढ़ाने की योजना बनाने के लिए सबसे पहले आपको क्या पता होना चाहिए? जैसा कि मैंने पहले कहा था कि एक इकाई में कई गणितीय अवधारणाएं, प्रतीक, सिद्धान्त, प्रक्रियाएं इत्यादि शामिल हो सकते हैं। इन सबको विद्यार्थियों तक पहुंचाने का सबसे अच्छा तरीका क्या होगा? इस सवाल का जवाब देने के लिए आपको हर इकाई का गहराई से विश्लेषण करके यह पता लगाना होगा कि उसके हर हिस्से के सिखाने के लक्ष्य क्या हैं? आपको यह भी पता लगाना होगा कि आपकी कक्षा के बच्चे गणित से सम्बंधित कौन–सी अवधारणाएं या कौशल पहले से जानते हैं।

एक बार यह सब पता लगा लिया, तो आगे क्या? फिर गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार उन अवधारणाओं और कौशलों को क्रमबद्ध करना होगा, जिन्हें बच्चे सीखने वाले हैं। इसके बाद आपको यह सोचना होगा कि हर अवधारणा या कौशल को सीखने के लिए बच्चों को किन अनुभवों, सामग्रियों और गतिविधियों की जरूरत होगी।

इस तरह के गहरे विश्लेषण से आपको अपनी इकाई सिखाने की ऐसी योजना बनाने में मदद मिलेगा जिसमें नीचे दी गई बातों का ध्यान रखा गया हो :–

i) बच्चों की क्षमता व समझ।

ii) नई गणितीय अवधारणाएं या कौशल समझने के लिए पहले से जरूरी जानकारी।

iii) जिन गणितीय अवधारणाएं को सीखा जाना है, उनकी प्रकृति।

iv) स्पष्ट लक्ष्य जिन्हें हासिल किया जाना है।

योजना बनाते वक्त यह बहुत जरूरी है कि आप तय कर लें कि इकाई के किस हिस्से को कितना समय देना है? जैसे कि, समय के मापन संबंधी इकाई की योजना बनाते वक्त आप इच्छित लक्ष्यों की रूपरेखा बनाएंगे, यह तय करेंगे कि कौन – कौन सी बातें पढ़ाई जानी हैं (जैसे, समय का कोई क्षण, समय का अन्तराल, मापन की इकाई, आदि), किस क्रम में इन्हें पढ़ाया जाना है और हर बात पर आप कितना समय लगाएंगे? अब आप यह देखने की स्थिति में हैं कि इस इकाई का कितना हिस्सा कितने दिन में पढ़ाना संभव है? आप एक–एक हफ्ते के लिए जरूरी समय तय कर सकते हैं।

एक उदाहरण के तौर पर आइए देखे कि छोटे बच्चों को लम्बाई का मापन सिखाने के लिए शिक्षण योजना कैसे बनाएं? लम्बाई किसी भी चीज़ का सबसे आसानी से नज़र आने वाला गुण है। ज़्यादातर बच्चे स्कूल शुरू करने से पहले ही लम्बाई की समझ बना लेते है और इससे सम्बधित शब्दावली से थोड़े बहुत परिचित होते हैं। लेकिन कई बार उनकी समझ ऐसी होती है जिसे बड़े लोग गलत कहेंगे। जैसे कि बच्चे कह सकते हैं कि बल खाई रस्सी, सीधी रखी रस्सी से छोटी है। ऐसी गल़तियां उन बच्चों में बहुत आम हैं जो लम्बाई के संरक्षण की बात को पकड़ या समझ न पाएं हों। जैसे–जैसे बच्चों का संज्ञान विकसित होता है और उन्हें समझ बनाने के लिए सीखने के अनुभव मिलते है, वैसे–वैसे ये गल़तियां दूर होती जाती है। तो इन सब बातों को ध्यान में रखते हुए, आइए देखें कि सीखने के अनुभवों का क्रम क्या हो?

एक क्रम निम्नानुसार हो सकता है :

1) उस गुण को पहचानना जिसका मापन करना है :

सबसे पहले हमें कोशिश करनी होगी कि चीज़ों की तुलना के जरिये बच्चे उस गुण (यानी लम्बाई) से परिचित हो जाएं। इसके लिए कुछ गतिविधियां की जा सकती हैः

क) देखने से, सबसे पहले यह पहचानें कि कौन सी छड़ ज्य़ादा लम्बी है।

ख) प्रत्यक्ष रूप से, दो चीज़ों की तुलना करके।

ग) अप्रत्यक्ष रूप से लम्बाई की तुलना करने के लिए किसी तीसरी चीज़ (पैमाने) का इस्तेमाल करके।

2) दो चीज़ो की लम्बाई की तुलना के लिए इकाई का चुनाव :

इकाइयां मुख्य रूप दो प्रकार की हो सकती हैं :

क) मनमानी इकाई (अमानक इकाई), जैसे हाथ या पेंसिल या रस्सी।

ख) मानक इकाई, जैसे इंच या सेंटीमीटर या मीटर।

3) इकाइयों की संख्या पता लगाना और बताना :

बच्चे इकाइयों की संख्या निम्नानुसार पता लगा सकते हैं :

क) हाथों की संख्या गिनकर,

ख) पैमाने का इस्तेमाल करके,

ग) इकाइयों के परस्पर सम्बंध का इस्तेमाल करके।

हर बार वे बताएं कि परिणाम क्या आया?

4) मानक इकाइयों की जरूरत को समझना।

अब आपने विषय के छोटे–छोटै हिस्से कर लिए हैं और शिक्षण के उद्देश्य भी तय कर लिए हैं। अब आपको यह तय करना है कि आप सीखने के लिए कौन से अनुभव देना चाहेंगे, उनमें कितना समय लगेगा, वगैरह और आखिर में आपको ऐसे उपयुक्त औज़ार और तकनीकें तैयार करनी होगी जिनसे आप अपने सिखाने के तरीके के असर का मूल्यांकन कर सकें।

प्रश्न : 2 या 3 अंकों की संख्याओं के जोड़ से संबंधित पाठों वाली इकाई की एक मोटे तौर पर योजना बनाइए।

इकाई को छोटे–छोटे हिस्सों में बांट लेने के बाद आपको यह भी सोचना होगा कि हर पाठ में अपने संसाधनों का कारगर इस्तेमाल कैसे करें?

7.3.4 पाठ की योजना

हर इकाई की योजना बनाते हुए आप हर हफ्ते अपनी कक्षा के बच्चों की प्रगति की जांच कर सकते हैं। यदि जरूरी हो, तो आप उनकी जरूरतों के मुताबिक सिखाने की रफ्तार बदल सकते है। आप योजना इस तरह भी बना सकते हैं कि कक्षा में अलग–अलग समूह में बच्चे विभिन्न प्रकार की विषयवस्तु का अभ्यास करें। इसके लिए एक तरीका तो यह हो सकता है कि आप एक ही समय पर विभिन्न वर्कशीट का इस्तेमाल करें। एक तरीका यह भी हो सकता है कि बाक़ी बच्चों को खेलकूद के लिए भेजकर आप कुछ बच्चों पर विशेष ध्यान दें। ऐसी गतिविधियां भी आयोजित की जा सकती हैं जिनमें सारे बच्चे भाग ले सकें, चाहे उनकी जानकारी का स्तर अलग–अलग क्यों न हो। यह सब सोचना पाठ की योजना बनाने का हिस्सा है।

पाठ की योजना बनाने में निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखने से शायद आपको मदद मिले :

- **पाठ के उद्देश्य स्पष्ट तौर पर सामने रखे** : आप कौन सी गणितीय अवधारणा पढ़ाने की कोशिश कर रहे हैं? इसके कौन से पहलू को आप चाहते हैं कि बच्चे सीखें? मकसद क्या है– एक नई चीज़ से परिचित कराना या किसी चीज़ की समझ विकसित करना, या कोई ख़ास कौशल विकसित करना या कुछ बातों का दोहरान करना?

- **जिन बातों को पहले से जानना जरूरी है उन्हें पता करें** : पाठ में आप जो कुछ पढ़ाने जा रहे हैं, उसके पहले क्या–क्या सीख लेना जरूरी है? क्या बच्चे यह सब सीख चुके हैं?

- **क्रम तय करें** : आप जिस कक्षा में पढ़ाने जा रहे हैं उसमें पहले, दूसरे आदि क्रम पर तार्किक रूप से कौन–सी गणितीय अवधारणा आती है? उसे देखते हुए ही पढ़ाने का क्रम तय करें। क्या बच्चों के मनोवैज्ञानिक स्तर को देखते हुए इस तार्किक क्रम में कोई फेरबदल जरूरी है?

- **कार्य पद्धति तय करें** : सिखाने का कौन–सा तरीका सबसे ज्यादा कारगर होगा? पिछले पाठों से इस पाठ को जोड़ने के लिए क्या करना होगा? बच्चों को किस तरह के ठोस

अनुभवों की जरूरत होगी? कौन–सी गतिविधियों से बच्चों की दिलचस्पी बनी रहेगी और उनका ध्यान भी लगा रहेगा? गतिविधि में आपकी भूमिका क्या होगी, और इसे कैसे करवाया जाएगा? क्या इस पाठ/गतिविधि में पूरी कक्षा शामिल रहेगी या छोटे समूहों में या सामग्री का उपयोग करेंगे, और कैसे? बच्चों की निजी जरूरतों को पूरा करने के लिए सामग्री या गतिविधियों में किस तरह के फेरबदल किए जायेंगे?

- **यह तय करें किं पाठ के हर हिस्से पर कितना वक्त लगाएंगे** : क्या इस अवधारणा की समझ बनाने के लिए इतना वक्त काफी होगा? क्या किसी गतिविधि के लिए ज़्यादा समय देना उचित होगा? उसका मतलब होगा कि बाद में कहीं और समय कम करना होगा।

- **मूल्यांकन का तरीका तय करें** : पाठ के दौरान सीखने – सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन करने के लिए आप क्या औज़ार इस्तेमाल करेंगे? पाठ के अंत तक बच्चों ने क्या सीखा, इसका मूल्यांकन किस तकनीक से करेंगे?

- **पाठ की योजना को लिखे** : योजना को लिख लेने से आपको कई बातों को स्पष्ट करने का मौका मिलेगा, और यह एक रिकॉर्ड भी रहेगा। इसका इस्तेमाल आप बच्चों के और खुद अपने काम के मूल्यांकन के लिए कर सकते हैं। और आगे के पाठों की योजना बनाते समय भी यह काम आएगा।

प्रश्न : पाठ की योजना बनाते वक्त आप और किन चीज़ों का ध्यान रखेंगे?

यह जरूरी नहीं है कि पाठ की योजना बनाते वक्त आप सारे बिन्दुओं पर विचार करें। लेकिन सवाल आपको खुद से पूछने चाहिए और अपने स्कूल के हालातों को मद्दे नज़र रखकर इनका जवाब देना चाहिए। ऐसे भी सवाल हो सकते हैं जिनके बारे में कुछ भी करना लगभग नामुंकिन है। इन्हें आप रेखांकित करके, फिलहाल छोड़ सकते हैं।

मिसाल के तौर पर, मान लीजिए कि आपने बच्चों को लम्बाई की उचित मानक इकाई के चुनाव की जरूरत समझाने के उद्देश्य से एक घण्टे का एक पाठ रखना तय किया है। एक योजना निम्नानुसार हो सकती हैं :

प) उन्हें हाथ से या रस्सी के टुकड़े से चीज़ों की लम्बाई या लोगों का कद नापने की गतिविधियाँ करवाएं। (15 मिनट)

पप) परिणामों की तुलना करने में उन्हें मदद दें। (10 मिनट)

पपप) कई बच्चों से किसी चीज़ की लम्बाई फुट्टे से नपवाएं (यह मानकर कि वे भागों को पढ़ना जानते हैं) और परिणाम रिकॉर्ड करवाएं। (10 मिनट)

पअ) उनको मानकीकरण के लाभ समझने में मदद करें। (10 मिनट)

अ) पाठ के दौरान गतिविधियों/परस्पर क्रियाओं का मूल्यांकन करें। (10 मिनट)

इस पाठ योजना को बनाते वक्त हमें यह ध्यान रखना होगा कि मापन की इकाई की आवधारणा विकसित होने में समय लगता है। एक ही गतिविधि कभी भी काफी नहीं होती। शिक्षक को अवधारणाओं के प्रति सजग रहना होगा और अन्य गुणों के बारे में भी इसी तरह की गतिविधियों को बनाना होगा। कक्षा कार्य के दौरान हो सकता है आपको लगे कि शुरू की गतिविधियों के लिए 15 मिनट काफी नहीं हैं और ज्यादा समय की जरूरत है। तब आपको लचीला रवैया अपनाना पड़ेगा और भविष्य में पाठ योजना बनाते समय इस बात का ध्यान रखना होगा।

उदाहरण : 'दो अंकों की संख्याओं का योगफल' एक इकाई माना जा सकता है। इसे हम निम्न प्रकार विभिन्न पाठों में बाँट सकते हैं–

(क) ऐसी दो संख्याओं को जोड़ना जिनके अंकों का योगफल 9 या उससे कम हो, जैसे–

12 + 23 = 57

53 + 45 = 98

(ख) ऐसी तीन संख्याओं को जोड़ना जिनके अंकों का योगफल 9 या 9 से कम हो, यानि बिना हासिल का योग–

12 + 23 + 34 = 69

35 + 50 + 14 = 99

30 + 25 + 12 = 67

(ग) ऐसी दो या तीन संख्याओं को जोड़ना जिनके अंकों का योगफल 9 या 9 से अधिक होता है, यानि हासिल वाला जोड़–

56 + 38 = 94

29 + 48 + 75 = 152

47 + 99 + 81 = 227

इसी प्रकार अन्य इकाईयाँ लेकर पाठों की योजना बनाई जा सकती है। गणित की किसी नई इकाई को सिखाने की योजना बनाते समय यह देखना आवश्यक होगा कि उसमें कौन–कौन सी गणितीय अवधारणाओं, प्रतीकों, सिद्धान्तों, प्रक्रियाओं आदि को शामिल किया गया है। इन सबको बच्चों तक पहुँचाने की सबसे अच्छी विधि क्या होगी? इसके लिए इकाई का गहराई से विश्लेषण करके पता लगाना होगा कि उसके हर भाग के सिखाने के लक्ष्य क्या हैं? साथ ही यह भी जानना आवश्यक होगा कि उस कक्षा के बच्चे इनसे संबंधित कौन–सी पूर्व अवधारणाएँ या कौशल जानते हैं?

अब गणित सीखने के सिद्धान्तों के अनुसार उन अवधारणाओं और कौशलों को क्रमबद्ध करना होगा। इसके बाद यह भी तय करना पड़ेगा कि हर अवधारणा व कौशल को सीखने के लिए बच्चों को कौन–कौन से अनुभव दिये जायेंगें, उनके लिए कौन–कौन सी गतिविधियाँ आयोजित की जायेंगी तथा किन–किन सामग्रियों का संग्रह करना पड़ेगा। इस प्रकार के विश्लेषण से उक्त इकाई को सीखने की योजना बनाने में मदद मिलेगी जिसमें सामान्यतः निम्न बातों का ख्याल रखा गया हो–

- बच्चों का उपलब्धि स्तर।
- बच्चों की ज्ञान ग्रहण करने की क्षमता।
- सीखी जानेवाली अवधारणाओं की प्रकृति।
- सीखाने के लक्ष्य।
- पाठ के हर हिस्से के लिए समय का अनुमान।

उपर्युक्त तथ्यों को स्पष्ट करने के लिए आइये अब एक और उदाहरण लेते हैं– जैसे दो भिन्नात्मक संख्याओं का अन्तर ज्ञात करना। इसके लिए निम्नांकित क्रम को अपनाया जा सकता है–

भिन्न की अवधारणा की स्पष्ट समझ

- क्या बच्चा संपूर्ण को वस्तु या वस्तुओं के समूहों के रूप में जानता है?
- क्या बच्चा वस्तु के बराबर भागों को समझता है?

सर्वप्रथम यह जानना आवश्यक होगा कि किसी पूर्ण का कोई हिस्सा ही उसका भिन्न कहलाता है। जैसे आधे से केवल किसी एक वस्तु के दो बराबर भागों में से किसी एक भाग का ही बोध नही

बल्कि पहले संपूर्ण को परिभाषित कर आधे की समझ विकसित करनी पड़ेगी? पूर्ण बहुत सी वस्तुओं का संग्रह भी हो सकता है। हम एक भिन्न 3/7 लेते हैं। इसके दो अर्थ हो सकते है–
पहला–तीन वस्तुओं के समूह को पूर्ण मानकर उसे सात बराबर भागों में बाँटे और उसका एक भाग लें।
दूसरा – एक ही वस्तु के सात बराबर भाग करें तथा उसके तीन टुकड़े लें।
इन दोनों ही बातों को समझकर भिन्न की अवधारणा को समझा जा सकता है।

दो भिन्नों या भिन्नात्मक संख्याओं की तुलना

- **क्या बच्चा घटाव को समझाता है?**
- **क्या बच्च तुल्य भिन्नों को समझाता है**

इसके लिए दोनों भिन्नों को तुल्य भिन्न में बदलना होगा– जैसे 3/5 तथा 2/7 की तुलना करने के लिए इन्हें तुल्य भिन्न में बदलना होगा। इसके लिए 5 और 7 का ल.स. लेना होगा जो की 35 आएगा, अब 35 को क्रमशः 5 और 7 से भाग देकर अंश और हर को निम्न प्रकार गुणा करना पड़ेगा–

$\frac{3}{5}\times\frac{7}{7}$ तथा $\frac{2}{7}\times\frac{5}{5}$ $=\frac{21}{35}$ तथा $\frac{10}{35}$

स्पष्ट है कि $\frac{21}{35}$ बड़ा है $\frac{10}{35}$ से। अतः $\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}$
इसी प्रकार भिन्नात्मक संख्याओं के साथ अन्य संक्रियाऐं भी की जा सकती हैं।
इसी तरह पूर्व अनुभवों को जोड़ते हुए शिक्षक को पाठ योजना या इकाई योजना बनानी चाहिए। पूर्व अवधारणाओं के आधार पर ही शिक्षण अधिगम सामग्री का चयन तथा उनका उपयोग सुनिश्चित होता है।

प्रश्न : 2 या 3 या 4 अंकों की संख्याओं को लेकर उन पर जोड़ की समझ विकसित करने हेतु पाठ योजना तैयार करें।
प्रश्न : भिन्नों पर भाग की संक्रिया करने हेतु एक पाठ योजना तैयार करें।

7.4 शिक्षण अधिगम गतिविधियाँ तथा सामग्री

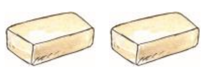
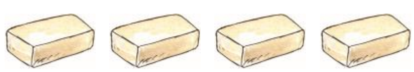
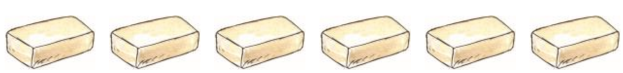
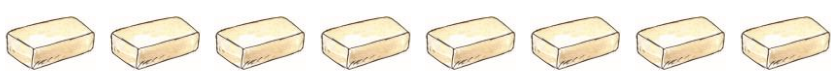
'गणित' मानव के लिए बौद्धिक चिन्तन का विषय रहा है। यह मस्तिष्क में नई रचनात्मक कल्पनाएँ उत्पन्न करता है तथा विचारों को सही दिशा प्रदान करता है। गणित का अमूर्त तत्त्वों, संकेतों और कल्पनाओं से अधिक संबंध रहता है, जिसके कारण गणित सीखना कठिन समझा जाता रहा है। समस्त गणितीय ज्ञान केवल मौखिक वर्णन कर देने से स्पष्ट नहीं होता है। इसे स्पष्ट करने के लिए मूर्त वस्तुओं की आवश्यकता पड़ती है। मूर्त वस्तुओं की सहायता से अमूर्त अवधारणाओं को आसानी से समझा जा सकता है। इन वस्तुओं की उपलब्धता स्थानीय परिवेश में भी संभव है, जिसें शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में उपयोग किया जाता है। किसी शिक्षण बिन्दु या अवधारणा की समझ स्पष्ट करने के लिए जिन सामग्रियों का उपयोग करते हैं, उसे शिक्षण अधिगम सामाग्री (TLM) कहते हैं।

स्थानीय परिवेश में उपलब्ध सामग्री से आशय है– विद्यालय के अंदर उपलब्ध सामग्री और विद्यालय के बाहर उपलब्ध सामग्री। पहले विद्यालय के अंदर उपलब्ध सामग्रियों की सूची बनायेंगे। संभावित सामग्रियाँ– ईंट, दीवार, छत, कमरा, श्यामपटट्, पुस्तक, घंटी, कंकड़, झिटकी, फूल–पत्ते–चोक आदि हो सकते हैं। इन सामग्रियों को शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में उपयोग

कर गणितीय आवधारणाओं को स्पष्ट किया जा सकता है, जिससे बच्चे सहजता से अवधारणाओं को समझंगे।

प्रश्न : विद्यालय के बाहर स्थानीय परिवेश में उपलब्ध सामग्रियों की एक सूची बनाइये कि जिन्हें शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में प्रयोग में लाया जा सकता है। और इस सूची में ऐसी सामग्रियों को ले जो आसानी से उपलब्ध हो।

7.4.1 वस्तुओं को शिक्षण अधिगम सामग्री के (T.L.M.) रूप में उपयोग करना –
उदाहरण के तौर पर आप बच्चों में संख्याओं की समझ विकसित करने के लिए यह गतिविधि करवाइये। आप बच्चों के सहयोग से विद्यालय परिवेश से रबर इकठ्ठा कीजिए। इन रबरों को निम्नांकित समूह में रखिए और संख्यांक को निरूपित कीजिए। संख्यांक को कागज के टुकड़ो पर अंकित कीजिए। किसी अन्य वस्तु के द्वारा भी यह गतिविधि करवाई जा सकती है।

रबरों की संख्या	**संख्यांक**
	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9

जैसा कि उपरोक्त गतिविधि में संख्या की अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए रबरों का उपयोग किया गया है। उसी प्रकार हम अन्य वस्तुओं का भी उपयोग कर सकते हैं।

इस प्रकार बच्चे 1–9 तक की संख्या को आसानी से समझ जायेंगे। आप शिक्षण अधिगम सामग्री की सहायता से छोटी संख्या, बड़ी संख्या तथा उसके अन्तर को भी समझा सकते हैं अर्थात

संख्याओं में तुलना की अवधारणा को स्पष्ट कर सकते हैं। साथ ही आरोही क्रम अर्थात बढ़ते क्रम और अवरोही क्रम अर्थात घटते क्रम की आवधारणा को स्पष्ट कर सकते हैं।

प्रश्न : संख्याओं की जोड़ की संक्रिया को स्पष्ट करने के लिए आप कौन–सी शिक्षण अधिगम सामग्री का प्रयोग करेंगे?

प्रश्न : भिन्न की अवधारणा स्पष्ट करने के लिए आप कौन–सी शिक्षण अधिगम सामग्री प्रयोग की जा सकती है?

हम यह जानते हैं कि गणितीय अवधारणाओं को स्पष्ट करने केलिए शिक्षण अधिगम सामग्री अत्यन्त महत्वपूर्ण होती है। परन्तु आपने कभी यह सोचा कि यह इतनी आवश्यक क्यों होती है? आओ सोचते हैं–

सोचने के क्रम में आप पायेंगे कि शिक्षण अधिगम सामग्री –

- गणितीय अवधारणा को स्पष्ट करने वाला तथा सीखने की प्रक्रिया को रूचिकर बनाने वाला होना चाहिए।
- कक्षा–कक्ष के नीरसता को समाप्त कर आनंददायी वातावरण का निर्माण करती है।
- इसके उपयोग से बच्चों का अधिगम में स्थायित्व आता है।
- इसके उपयोग से गणित सीखना सरल हो जाता है।
- यह आकर्षक होती है जिससे बच्चे पढ़ने में मजा लेते हैं।
- स्थानीय परिवेश की वस्तुओं से निर्मित होती है।
- उपयोग करने में सुविधाजनक होती चाहिए।
- सामूहिक कार्यों को बढ़ावा देने वाली होती है जिससे बच्चों को एक–दूसरे से सीखने के अवसर प्राप्त होते हैं।

प्रश्न : शिक्षण अधिगम सामग्री के बिना गणित शिक्षण कठिन है। कैसे?

प्रश्न : शिक्षण अधिगम सामग्री गणित सीखने–सिखाने की प्रक्रिया को बल–केन्द्रित बनाता है। कैसे?

ज्ण्स्ण्डण की प्रभाविता एक योग्य शिक्षक द्वारा कुशल गतिविधि के संचालन पर भी निर्भर करता है। एक ज्ण्स्ण्डण द्वारा एक से अधिक गणितीय अवधारणाओं को स्पष्ट किया जा सकता है। यह शिक्षक की क्षमता पर निर्भर करता है।

7.4.2 गणित सबंधी विविध शिक्षण अधिगम सामग्रियां

1. मॉडल (Model)

जब कक्षा–कक्ष में वास्तविक वस्तुओं का लाना संभव नहीं हो तो उस वस्तु का मॉडल प्रयोग में लाते हैं। मॉडल उस वस्तु का प्रतिबिम्ब होता है। इसे बनाते समय यह ध्यान में रखा जाता है कि वह वास्तविक वस्तु के सही अनुपात में हो। क्षेत्रामिति और ज्यामिति के शिक्षण में मॉडल काफी सहायक सिद्ध होता है। विभिन्न त्रिभुजों के प्रकार, शंकु, गोला, बेलन, घन, घनाभ, पिरामिड आदि का मॉडल बनाकर संबंधित पाठ को रूचिकर एवं सरस बना सकते हैं।

2. चार्ट

'चार्ट' को एक शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में उपयोग किया जा सकता है। इससे गणितीय अवधारणाओं को आसानी से प्रस्तुत किया जाता है। चार्ट का रंग वास्तविक वस्तु के समान तथा 'आकार' अनुपात में होना चाहिए। चार्ट को और अधिक प्रभावशाली बनाने के लिए चार्ट पर चमकीले रंगों का उपयोग किया जा सकता है। चार्ट अनेक प्रकार के होते है। फ्लोचार्ट, पिक्टोरियल चार्ट, समय तालिका आदि।

3. गणित किट –

'गणित किट' गणित शिक्षण को सहज, सार्थक एवं चिर स्थायी बनाने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इसका प्रयोग बच्चों को गणितीय तथ्यों तथा गणितीय ढाँचे को समझने में सहायता प्रदान करता है। गणित किट में निम्नांकित सामग्रियाँ रख सकते है–

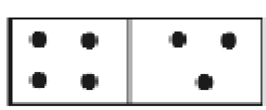
- गिनतारा
- भिन्न–डिस्क
- ठोस आकार जैसे घनाभ, घन, बेलन, शंकु, गोला
- डॉमिनों
- नेपियर पट्टियाँ
- घन छड़ें
- क्विजनेयर की पटिटयां

उदाहरण :

1. **डॉमिनो** : यह एक आयताकार पट्टी है जो 2 बराबर – बराबर भागों में विभाजित होती है। अतः आयताकार पट्टी की लम्बाई व चौड़ाई का अनुपात 2:1 होता है। जैसे– किसी पट्टी का अनुपात 4:2 है तो लम्बाई = 4 सें.मी., चौ. = 2 सेंमी. होगी।

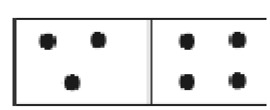
यह पट्टी 2×2 के 2 भागों में विभाजित होगी। इसमें दोनों वर्गों में छेद होते हैं। छेदों की संख्या 0–9 होती है। यदि किसी डोमिनों में बाई ओर 4 व दाईं ओर तीन छेद हैं तो उसे हम 4–3 डोमिनो कहेंगे। उल्टा करने पर बाईं ओर 3 व दाई ओर 4 छेद होंगे तो उसे 3–4 डोमिनो कहेंगे।

(उलटने पर)



4 छेद 3 छेद

4–3 डोमिनो



3 छेद 4 छेद

3–4 डोमिनो

अतः कुल 55 डोमिनो बनती हैं।

(0–1, 0–2; 0–3 .... 0–9 (1–2 व 2–1 एक ही डोमिनो हैं।)

1–1, 1–2, 1–3 1–9

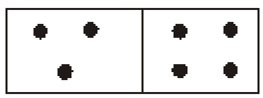
2–2, 2–3 .... 2–9)

उपयोग व क्रियाकलाप :–

इसका उपयोग संख्याओं पर आधारित क्रियाकलाप जैसे – जोड़ना, घटाना, छोटा–बड़ा पहचानना, खेल आदि के लिए किया जाता है।

(1) संख्या गिनना : संख्याओं के गिनने के सतत् प्रयास के लिए हम डोमिनो को बच्चों को दिखाकर उन्हें प्रत्येक ओर के छेदों को गिनने के लिए कहेंगे। बाद में उन्हें उसी रूप में लिखने को कहेंगे।

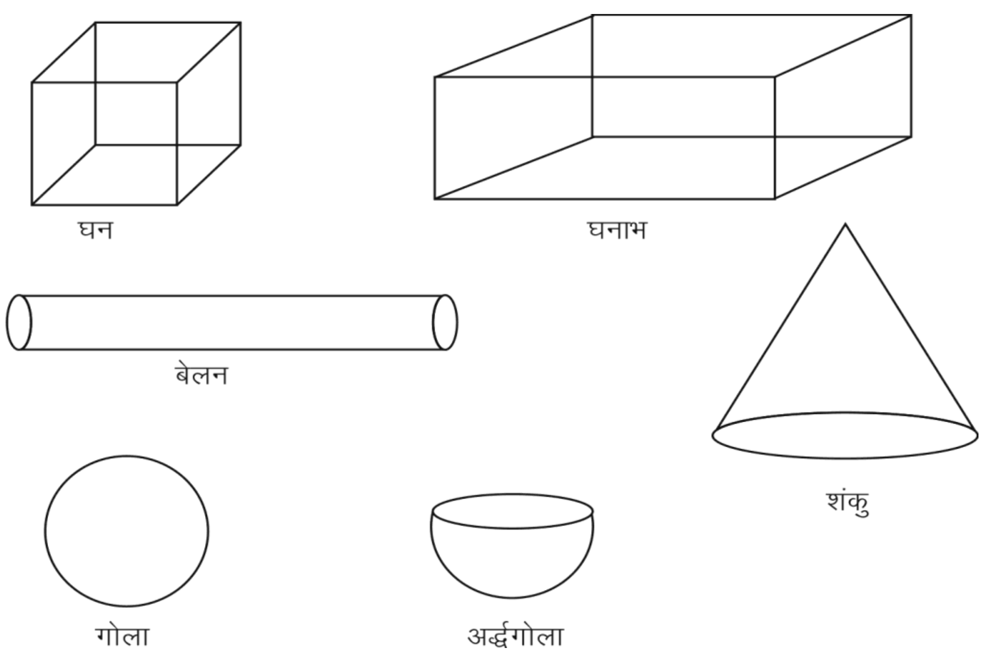
जैसे – 3–4 डोमिनो देने पर बच्चों को दाईं ओर 4 और बाईं ओर 3 छेद गिनेंगे। अतः उन्हें दाईं ओर 4 व बाईं ओर 3 लिखने को कहेंगे।



3 – 4 डोमिनो लिखने का तरीका

(2) बड़ी व छोटी संख्या पहचानना : बच्चों को एक डोमिनो दें। जैसे 2–3। फिर प्रत्येक दाईं ओर वाले छेद का बाईं ओर वाले छेद के साथ जोड़े बनवाएँ। जोड़े पूरे होने पर जिस ओर के छेद बिना जोड़े के बच जाएँगे, उस ओर छेदों की संख्या ज्यादा है।

2. **ठोस वस्तुएँ** : इसमें एक घन (Cube), घनाभ (Cuboid), बेलन (Cylinder), शंकु (Cone), गोला (Sphere), अर्द्धगोला (Hemisphere) होते हैं।



उपयोग व क्रियाकलाप : इसका उपयोग बच्चों को ठोस वस्तुओं के गुणों, भागों, क्षेत्रफल व आयतन के प्रत्यय को समझाने के लिए किया जाता है।

जैसे – कोने, किनारे, शीर्ष, क्षेत्रफल आदि।

विद्यार्थियों को घन, घनाभ व अन्य ठोस देकर उसके कोने, किनारे गिनकर लिखने को कहें।

विभिन्न गुणों को परखना :–

विद्यार्थियों को ठोस वस्तुएँ दें व उनका परीक्षण करके विभिन्न गुणों को जानने के लिए कहें।

1. कौन–सी ठोस वस्तुएँ लुढ़कती हैं?
2. विभिन्न ठोस वस्तुओं में कहाँ–कहाँ सममिति पाई जाती है?
3. घन व घनाभ में क्या अन्तर है?
4. घन व घनाभ में कितने समकोण हैं?
5. गोले व अर्द्धगोले में क्या सम्बन्ध है? आदि।

प्रश्न : घन और घनाभ का मॉडल ;डवकमसद्ध तैयार कर सतह, कोना और किनारों की जानकारी प्राप्त करे।

7.4.3 विद्यालय प्रांगणः अधिगम सामग्री के रूप में

विद्यालय शब्द दो शब्दों से मिलकर बना है – विद्या + आलय। विद्यालय एक विशेष स्थान है, जहाँ पर बच्चे विद्या ग्रहण करते हैं। एक विद्यालय में केवल अध्यापक व बच्चे एकत्रित नहीं होते अपितु वहाँ पर एक ऐसा वातावरण स्थापित करते हैं जहाँ पर शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया हो सके। इसी बात को ध्यान में रखते हुए ठंस। को चर्चा में लाया गया।

BaLA एक ऐसा प्रयास है जो कि बच्चों व विद्यालय के बीच एक संबंध स्थापित करने के लिए बनाया गया है। BaLA का अर्थ विद्यालय की दीवारों, जमीनों या खेल के मैदानों की रंगीन करने से नहीं है अपितु विद्यालय में उपलब्ध विभिन्न वस्तुओं की शिक्षण–अधिगम के लिए प्रयोग में लाने से हैं। चाहे वह खिड़की, दरवाजे, पंखा हो या विद्यालय में आने वाली धूप, रोशनी या आवाजें। BaLA का अर्थ है Building as Learning aid। इससे बच्चे किताबों की दुनिया से बाहर सभी अधिगम के तरीके व प्रत्यय खोजेंगे व सीखेंगे।

BaLA का ही उपयोग क्यों?

- यह प्रत्येक विद्यालय में उपलब्ध होता है।
- यह अधिगम को मनोरंजक बनाती है।
- यह बच्चों को स्कूल के प्रति आकर्षित करती है व उनके स्कूल को लेकर भय को कम करती है।
- यह स्वयं अधिगम के अवसर प्रदान करती हैं।
- यह प्रत्येक बच्चे के पास उपलब्ध है।
- यह ज्यादा समय तक चलने वाली है व खोजी प्रवृत्ति को बढ़ा सकती है।
- यह बच्चों को एक ही वस्तु को विभिन्न नजरियों से देखने के लिए प्रेरित करती है।
- यह बच्चों के बस्ते का बोझ भी कम करती है।

साथ–साथ ठंस। के उपयोग से बच्चे जब खिड़की के बाहर देखेंगे या ब्लैकबोर्ड या चॉक से ऊब कर विद्यालय में घूमेंगे तो उनका समय बेकार नहीं जाएगा। यह विद्यालय में हर जगह अधिगम के अवसर पाएंगे व खेल–खेल में भी कुछ न कुछ सीखेंगे। अब वे बिना मतलब का शोर नहीं मचाएँगे बल्कि काम की बात पर चर्चा करेंगे। यहाँ तक कि छब्थ्.2005 ;छब्म्त्ज्द्ध के द्वारा क्रियाकलापों पर आधारित अधिगम को भी हम ठंस। के उपयोग से ही प्रोत्साहित कर सकते हैं। बच्चों के दैनिक जीवन में भी हम अधिगम को ठंस। के उपयोग से ला सकते हैं।

विद्यालय के भौतिक वातावरण का उपयोग :

विद्यालय के भौतिक वातावरण का उपयोग करके भी हम बहुत से अधिगम स्तर प्राप्त करने में बच्चों की मदद कर सकते हैं। अगर जरूरत है तो केवल एक ऐसे नजरिए कि जो कि हमें भौतिक वस्तुओं को शिक्षण अधिगम सामग्री के रूप में उपयोग के लिए प्रेरित करें।

1. मापन के तरीके व मापन –

(1) खिड़की, दरवाजे, ब्लैकबोर्ड, खेल का मैदान आदि से हम लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई, गहराई आदि के प्रत्यय समझा सकते हैं।

(2) साथ ही मुख्य किनारों व कोनों पर मुख्य कक्षों की वहाँ से दूरी व दिशा लिखकर लगा सकते हैं। शुरू से ही बच्चे मापन के प्रत्यय से परिचित हों।

(3) मानक व अमानक इकाइयों को भी ठंस। का उपयोग करके बता सकते हैं।

(4) अगर हो सके तो ॆबंसमए प्दबी ज्ंच जैसी वस्तुएँ डेस्क, दीवार, दरवाज़े आदि पर लगा सकते हैं।

(2) कोण : हमारे आस–पास बहुत से कोण बनते हैं परंतु हम उनका परीक्षण नहीं कर पाते हैं। अगर उनका परीक्षण करें तो कोण के प्रत्यय को सिखाने व सीखने के अलग–अलग व मनोरंजक तरीके हम अपना सकते हैं।

(1) सीढ़ियों व दरवाजों पर कोण बने होते हैं।

(2) खेल के मैदान में झूलों पर कोण बने होते हैं।

(3) मेज, किताब, कोनों, छत आदि पर कोण बने होते हैं।

(4) अगर हो सके तो मुख्य स्थानों पर जैसे – दरवाजों, खिड़की आदि पर कोण, पेंट या अन्य किसी चीज का उपयोग करके उभार सकते हैं।

(5) हर माप के नहीं तो कम से कम मुख्य कोण – 90°, 360°, 180°, 45°, 60°, 120°, आदि का मापन अवश्य समझाएँ।

(3) सममिति :

(1) दरवाजे, खिड़की, शीशा आदि के द्वारा यह प्रत्यय समझाया जा सकता है। जैसे – दरवाजे की दोनों किवाड़ में सममिति है या नहीं। अगर सम्भव हो तो उन पर प्रिन्ट भी किया जा सकता है।

(4) समय : बच्चों को ऐसे अनुभव देने चाहिए जिससे वे समय को अपने दैनिक जीवन की गतिविधियों से जोड़ सकें।

(1) किसी उपयुक्त जगह पर डंडा गाढ़ कर या खम्बा बनाकर हम सूर्य घड़ी के द्वारा समय का प्रत्यय समझा सकते हैं।

(2) मानक समय का प्रत्यय भी हम सूर्य घड़ी के आस–पास गोल प्लैटफार्म का उपयोग करके दे सकते हैं।

(3) धूप में अपने स्वयं के छायाचित्र को भी समय से जोड़ सकते हैं।

(4) अगर सम्भव हो तो दीवारों पर कैलेन्डर भी लगा सकते हैं। इस पर दैनिक गतिविधियों की सूची बनाएँ।

(5) गिनती : यह संख्याओं का घटते क्रम या बढ़ते क्रम में होना है–

(1) यह प्रत्यय विद्यालय की प्रत्येक वस्तु के सहारे समझाया जा सकता है चाहे वह पेड़ हो, कमरें हों, सीढ़ियाँ हों, ईंटें हो, दीवारें हो आदि।

(2) अगर सम्भव हो तो हम गिनती मुख्य स्थानों जैसे : सीढ़ियों, ईंटों, रैलिंग आदि की सहायता से भी करवा सकते हैं।

करना व सीखना (क्रियाकलाप बोर्ड की सहायता से)

इनका उपयोग बच्चों को स्वतंत्र रूप से अपने आस–पास के अनुभवों को एक ही क्रियाकलाप के द्वारा दर्शाने के लिए किया जाता है। इनका उपयोग बच्चों को क्रियाशील व सृजनशील बनाता है।

बोर्ड के प्रकार :

(1) ज्यातिमीय बोर्ड

(2) छिपी वस्तु पहचानो (मरीचिका बोर्ड)

(3) पेंटिंग बोर्ड

ये बोर्ड विद्यालय में दीवारों पर या दरवाजों पर पेन्ट करवाए जा सकते हैं तथा बच्चों को इन पर कार्य करवाया जा सकता है। BaLA से यह फायदा होगा कि वे जब चाहें इस पर कार्य कर सकते हैं। इसी प्रकार डॉट बोर्ड व ग्रिड बोर्ड को भी हम दीवारों, दरवाजों या फर्शों पर भी पेन्ट करवा सकते हैं।

प्रश्न : इसी प्रकार के करना व सीखना से संबंधित अन्य क्रियाकलाप के बारे में लिखिए।

7.4.4 सीखने के संसाधन के रूप में गणित की पाठ्य–पुस्तक एवं पुस्तकालय

पाठ्यपुस्तक को सदैव विद्यालयी शिक्षा का एक महत्वपूर्ण हिस्सा समझा जाता है। एक अध्यापक शायद पाठ्यक्रम को नहीं देखता हो परन्तु पाठ्यपुस्तक के बिना वह पढ़ा नहीं सकता है। एक पाठ्यपुस्तक का विकास विषय विशेषज्ञों और अनुभवी अध्यापकों द्वारा निर्धरित पाठ्यक्रम के अनुसार किसी एक कक्षा के लिए करते हैं। पाठ्यपुस्तक के विषयवस्तु और उससे संबंध्ति अवधरणाओं को एक निश्चित क्रम के अनुसार व पाठ्यक्रम के अनुरूप उन विशेषज्ञ समूह के द्वारा व्यवस्थित किया जाता है जो पाठ्यपुस्तक का भी विकास करते हैं। इसलिए पाठ्यपुस्तक को विद्यार्थियों अध्यापकों, अभिभावकों और हितधरकों द्वारा विभिन्न विषयों के विद्यालय पाठ्यक्रम के समग्र अनुभव के रूप में देखा जाता है। चूंकि पाठ्यपुस्तक शिक्षण और अधिगम में सहायक होता है इसे सबसे उपयुक्त शिक्षण अधिगम सामग्री समझा जाता है।

प्र”नः पाठ्यपुस्तक का उपयोग अध्यापन और अधिगम के किस प्रकार से कर सकते हैं?

अध्यापक के रूप में हम प्रायः पाठ्यपुस्तक का अनुसारण विषयवस्तु के अनुरूप और पाठों के क्रमानुसार शिक्षण कार्य करते हैं और पाठ्यपुस्तक के अंत में दिये गये अभ्यास को पूरा करने के लिए कहते हैं। विद्यार्थियों के प्रदर्शन का मूल्यांकन पाठ्यपुस्तक के विषयवस्तु के आधार पर निर्मित परीक्षण पत्र के द्वारा किया जाता है। यह कहना गलत न होगा कि विद्यालय की शैक्षणिक क्रियाकलाप पूर्ण रूप से निर्धरित पाठ्यपुस्तक के विषयवस्तु पर आधारित होता है। पाठ्यपुस्तक को शिक्षण अधिगम के लिए आधरभूत सामग्री के रूप में पहचाना जाता है।

बिहार राज्य ने गणित की पाठ्यपुस्तकों का निर्माण राष्टीय पाठ्यक्रम रूपरेखा 2005 तथा बिहार पाठ्यक्रम रूपरेखा 2008 के सिफारिशों के अनुसार किया है। इन पाठ्यपुस्तकों को ठीक प्रकार से उपयोग किया जाये तो यह अधिगम के लिए निम्नांकित विशेषताओं के कारण एक उत्तम स्रोत हो सकता है–

- राष्टीय पाठ्यक्रम रूपरेखा 2005 तथा बिहार पाठ्यक्रम रूपरेखा 2008 के सिफारिशों के अनुसार पाठ्यपुस्तक का निर्माण, कक्षाकक्ष के भीतर व बाहर विद्यार्थियों और अध्यापकों के

लिए क्रियाकलापों को व्यवस्थित रूप से समावेश करके किया गया है। ये सब अध्यापकों और विद्यार्थियों के लिए अधिगम क्रियाकलापों का आयोजन करने के अवसर उपलब्ध कराता है।

- विषय वस्तु से संबंध्ति अवधारणाओं को पाठ्यपुस्तक में व्यापक रूप से व्यवस्थित किया जाता है जो कि पाठ को पढ़ाने के लिए रूपरेखा तैयार करने में नये विचारों को जन्म देता है। एक कम कल्पनाशील अध्यापक शायद पाठ्यपुस्तक में दिये गये उदाहरणों का अनुसरण करके कक्षा में शिक्षण कार्य करें लेकिन एक अधिक कल्पनाशील अध्यापक पाठ्यपुस्तक के उदाहरणों से प्रेरणा लेकर कई वैकल्पिक शिक्षण अधिगम क्रियाकलापों का सृजन कर सकता है जिससे विषय–वस्तु के अवधारणाओं को रूचिपूर्वक व अर्थपूर्ण ढंग से वह विद्यार्थियों को समझा सकता है।
- अवधारणाओं को कई प्रकार के क्रियाकलापों / माध्यमों, जैसे गाना, कविता, कहानी, पहेली, और चर्चा, से प्रस्तुत किया गया है। इसके कारण बच्चे सीखने में अध्कि रूचि लेते हैं। पाठ्यपुस्तक में प्रस्तुत सामग्रियों के आधर पर आप अपने वातावरण, परिवेश में उपलब्ध सामग्रियों का इस्तेमाल करके अधिगम क्रियाकलाप कम खर्च व प्रयास से तैयार कर सकते हैं।
- सिखायी गयी अवधारणाओं को सुदृढ़ बनाने के लिए विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए क्रियाकलाप दिया गया है। इसस`विद्यार्थियों के अभ्यास के लिए नये क्रियाकलापों का सृजन करने के लिए नये विचार उपलब्ध कराता है। इस संदर्भ में पाठ्यपुस्तक एक उत्कृष्ट शिक्षण अधिगम सामग्री है।
- नई पाठ्यपुस्तक का निर्माण तथ्यों पर आधारित होने के साथ–साथ विद्यार्थियों के लिए चर्चा करने के लिए अवसर प्रदान करता है। उदाहरण के लिए अवधारणाओं और क्रियाकलापों समस्याओं को समझने व अभ्यास करने के लिए स्थान दिया गया है जिससे बच्चों में चिंतनात्मक सोच का विकास हो और छोटे समूह में कार्य करने के लिए प्रेरित हो।
- पाठ्यपुस्तक में दिये गये अभ्यासों व क्रियाकलापों का उपयोग विद्यार्थियों के अर्जित ज्ञान का मूल्यांकन करने के लिए किया जा सकता है। ये अभ्यास आपको कई प्रकार के परीक्षण आइटम तैयार करने में सहायक सिद्ध होंगे जिसका उपयोग आप इकाई परीक्षण और अन्य मूल्यांकन परिस्थितियों में कर सकते हैं।

प्र”नः जिस पाठ्यपुस्तक का उपयोग आप कर रहे है उसमें से एक विषयवस्तु का चयन करके उसे कक्षा में पढ़ाने के लिए जिन व्याकलापों व सामग्रियों का उपयोग आप करेंगे उनकी एक सूची बनायें।

राष्टीय पाठ्यक्रम रूपरेखा 2005 के अनुसार, किसी भी पाठ्यपुस्तक का उपयोग एक संरचनात्मक समझ विकसित करने के लिए लिखित विचारों, वस्तुओं, और व्यक्तियों के सक्रिय भागीदारी के द्वारा किया जा सकता है।

गणित पुस्तकालय में विभिन्न विषयों से संबंधित बहुत सी पठनीय सामग्री उपलब्ध होता है जिसका उपयोग सहायक शिक्षण सामग्री के रूप में उपयोग किया जा सकता है। आपको अपने विद्यालय के विद्यार्थियों को पुस्तकालय से पुस्तकें प्राप्त करने के लिए योजना बनाने की आवश्यकता है। छुट्टी के दिनों में भी विद्यार्थियों को पुस्तकालय की पुस्तकें उपलब्ध कराये। इससे विद्यार्थियों में पढ़ने की प्रवृनि का विकास होगा साथ ही साथ उन्हें संदर्भ सामग्री जैसे एटलस, शब्दकोष, इनसाइक्लोपीडिया या विषयविशेष से संबंध्ति आलेख आदि प्राप्त करने का लाभ मिलेगा।

7.4.5 गणित कोना एवं गणित प्रयोग"ााला

गणित विषय को कठिन माना जाता है तथा कहा जाता है कि यह केवल उच्च मानसिक योग्यता वाले विद्यार्थियों के पढ़ने के लिए ही है। यह बच्चों में डर पैदा करता है जो अधिगम में बाधा उत्पन्न करता है तथा बच्चों की उपलब्धियों, पर विपरीत प्रभाव डालता है। परन्तु वास्तव में, विद्यालय में उचित माहौल के जरिए गणित को सभी बच्चे को सिखाया जा सकता है। गणित को प्रसन्नता, हर्ष, रूचि एवं खुशी के भाव से सिखाए जाने की आवश्यकता है। विषय में रुचि उत्पन्न करने के लिए जहां तक संभव हो इसे दैनिक जीवन की परिस्थितियों से जोड़ा जाना चाहिए। गणितीय अवधारणों का विकास केवल सैद्धान्तिक जानकारी देने तथा पाठ्यपुस्तक में दी गई समस्याओं को हल करने के द्वारा ही संभव नहीं है इसके साथ–साथ मूर्त अनुभवों पर आधारित गतिविधियों को कराया जाना आवश्यक है।

शिक्षार्थी को बहुत से गणितीय तथ्यों को बताया जाता है, परन्तु यह कभी–कभी ही बताया जाता है कि वास्तव में गणितीय प्रक्रिया क्या है तथा इसे कैसे लागू किया जाना चाहिए। गणितीय शिक्षण को बच्चों में अवधारणात्मक स्पष्टता के जरिए किया जाना आवश्यक है न कि केवल सैद्धान्तिक सूचनाएं प्रदान करके जिन्हें बच्चा केवल नोटबुक पर दर्ज करता रहता है तथा रटकर परीक्षाओं में लिख देता है। इसके लिए विद्यालय में गणित को सही ढंग से सिखाने की आवश्यकता है जिसमें गणित कोना तथा गणित प्रयोगशाला बहुत सहायता करती है।

गणित प्रयोगशाला ऐसा स्थान है जहां बच्चे विविध गतिविधियों तथा सामग्री के जरिए अधिगम करते हैं तथा विभिन्न गणितीय अवधारणाओं की खोज करते हैं, विविध गणितीय तथ्यों का सत्यापन करते हैं एवं उन्हें प्रमाणित करते हैं। गणित सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में गणित प्रयोगशाला, सैद्धान्तिक ज्ञान तथा प्रयोगात्मक कार्य को एकीकृत करने में सहायता करती है। यहां बच्चे विविध गतिविध्यिों के जरिए हस्त कौ"ालों द्वारा अनुभव करते हैं। गणित प्रयोग"ााला, गणित की विभिन्न शाखाओं में गणितीय जागरूकता, कौशल निर्माण, सकारात्मक अभिवृत्ति तथा करके सीखने की योग्यता विकसित करती है।

गणित प्रयोग"ााला वह स्थान है जहां बच्चे मूर्त वस्तुओं का प्रयोग करके बहुत से गणित तथ्यों का सत्यापन विभिन्न माडलों, मापन एवं अन्य क्रियाकलापों के जरिए करते हैं। उदाहरण के लिए कक्षा आठ के बच्चों को वृत्त का क्षेत्रफल सिखाने के दौरान, क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र बता देना तथा श्यामपट्ट पर उसी तरह की कई समस्याएं हल करवा देना परम्परागत तरीका है। शिक्षण का यह तरीका परिणाम आधारित है जो कि शिक्षार्थियों में गणनात्मक कौशलों के विकास पर केंद्रित है। शिक्षार्थी यह जान ही नहीं पाते कि वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का तरीका गई क्यों एवं कैसे है? इसलिए गणित सीखने की प्रक्रिया ज्ञान की रचना के लिए अनिवार्य है तथा गणित प्रयोगशाला प्रक्रिया आधारित अधिगम में सहायता प्रदान करती है।

गणित प्रयोगशाला का उपयोग प्राचीन तरीकों से गणित सीखने से ज्यादा प्रभावी है। वास्तव में अधिगम उन परिस्थितियों में अधिक प्रभावी एवं सुदृढ़ होता है जहां बच्चों को अपने विचार व्यक्त करने तथा पृष्ठ पोषण के अवसर मिलते हैं। गणित प्रयोगशाला में गणित की अवधारणाओं को सिखाने के लिए गणित प्रयोगशाला को पाठ्यक्रम में नियमित रूप से जोड़ा जाना आवश्यक है। गणित प्रयोगशाला कक्षा–कक्षा अधिगम प्रक्रिया की विरोधी नहीं है अपितु गणितीय अवधरणाओं को विविध गतिविधियों के जरिए सिखाने की एक विधि है जिसका उद्देश्य ज्ञान सृजन करना है। गणित प्रयोगशाला गतिविधि में शिक्षक, शिक्षार्थी, कक्षा–कक्ष, तकनीक, व्यवस्था, प्रबन्धन, परियोजना, प्रयोग शिक्षात्मक योजनाएं सभी शामिल हैं। हम गणित प्रयोगशाला को करके सीखने, अवलोकन

द्वारा सीखने, अनुकरण करके सीखने, एक दूसरे से विचार विमर्श करके सीखने का स्थान कह सकते हैं।

गणित प्रयोगशाला के उपयोग के निम्नलिखित लाभ हो सकते हैं–

- अमूर्मता को मूर्त रूप में समझाना।
- विद्यार्थी को स्वयं खोज के अवसर प्रदान करना।
- विद्यार्थी में रुचि एवं प्रेरणा को बढ़ावा देना।
- गणित के प्रति सकारात्मक अभिवृनि को बढ़ावा देना।
- समस्या समाधन की योग्यता को बढ़ाना।
- बच्चे की उसकी अपनी दर से सीखने के अवसर देना।
- बच्चे की सव्यि रूप से भागीदारी सुनिश्चित करना।
- गणितीय सूचनाओं का प्रदर्शन करना।
- प्रायोगिक कार्य के द्वारा प्रयोग के लिए एक स्थान।
- आसान पहुंच हेतु गणितीय सामग्रियों एवं संसाधनों को रखने का स्थान।
- अमूर्तता को समाप्त करना तथा प्रभावी शिक्षण अधिगम को बढ़ावा देना।

गणित प्रयोगशाला के इन लाभों के अतिरिक्त यह आशा की जाती है गणित प्रयोगशाला के प्रयोग से इस विषय की अमूर्तता को कम किया जा सकता है तथा बच्चों को इस दिशा में कार्य करने के अवसर प्रदान किया जा सकता है।

गणितीय अवधरणाओं के सिखाने में गणित प्रयोगशाला में की जाने वाली गतिविधियां निम्नलिखित तरीकों से योगदान दे सकती है–

- ये गतिविधियां बच्चों को गणितीय अवधरणाओं को मूर्त रूप से समझने में मदद करती हैं। साथ ही यह अधिक अमूर्त चिंतनों हेतु मजबूत आधर प्रदान करती है।
- ये गतिविधियां व्यक्तिगत रूप से कार्य करने के अवसर प्रदान करती हैं। ये बच्चों को स्वयं करके सीखने के लिए प्रेरित करती हैं साथ ही बच्चा अपनी गति से सीखने का प्रयास करता है।
- यह गतिविधियां बच्चों में रुचि तथा आत्म विश्वास बढ़ाने में सहायक हैं।
- यह बच्चों को एक ही गतिविधि को कई बार दोहराने के अवसर प्रदान करती है। वे पुनः करके देख सकते हैं तथा समस्या और उसके समाधान खोजने हेतु पुनर्विचार कर सकते हैं। यह बच्चों में संज्ञानात्मक विकास को बढ़ावा देता है।
- यह बच्चों में समूह में चर्चा करने, चिंतन करने तथा अवधारणाओं के समायोजन के अवसर प्रदान करती है।
- यह बच्चों में अपने परिवेश में गणितीय अवधारणाओं के अनुप्रयोग के अवसर प्रदान करती है।
- यह विषय के नए क्षेत्रों हेतु आधार तैयार करती है तथा नए प्रयोगों हेतु अवसर प्रदान करती है।
- बहु–इंद्रियों के उपयोग की वजह से बच्चे के ज्ञान में वृद्धि होती है।

सापेक्ष रूप में नए रूप में गणित प्रयोगशाला को गणित कोना भी कहा जा सकता है। यह भी वास्तव में एक नया प्रत्यय है, जिस विद्यालय में गणित प्रयोगशाला नहीं हैं वहां बच्चे अपनी कक्षा के एक कोने में गणित के तथ्यों के सत्यापन हेतु सामग्री को एकत्र कर सकते हैं। अध्यापक किसी भी एक कोने को गणित कोने का रूप दे सकता है जहां वह बच्चों को कम लागत की सामग्री, परिवेश में उपलब्ध सामग्री, गणित उपकरणों का संग्रह करने के लिए प्रेरित कर सकता है। गणित कोने में गणित प्रयोगशाला की तरह सभी उपकरण नहीं रखे जा सकते हैं परन्तु आवश्यक उपकरणों का संग्रह किया जा सकता है जिनका उचित रख–रखाव एवं प्रबंधन आवश्यक है। गणित प्रयोगशाला या गणित कोने में पायी जाने वाली सामग्री या उपकरणों में बने बनाए लड़की/धतु/प्लास्टिक के गणित सैट, चार्ट तथा चित्र, कम्प्यूटर, श्रव्य–दृश्य अनुदेशन सामग्री जैसे प्रोजेक्टर, रेडियो, टेलीविजन, टेप रिकार्डर इत्यादि, ठोस; यथार्थ रूप में या मॉडल रूप में, बुलेटिन बोर्ड, त्रिविमीय सामग्री, फिल्म स्ट्रिप, पोर्टेबल बोर्ड, अबेकस, कार्डबोर्डस, ग्राफिक्स, टेप, मापक, कार्य पुस्तिकाएं, ग्राफ, विविध बोर्ड, फलेश कार्डस इत्यादि हो सकते हैं।

7.5 मनोरंजक गणितः गणितीय खेल तथा पहेलियाँ

कभी आपने इस बात पर विचार किया है कि कुछ बच्चे गणित को नीरस और उबाऊ विषय समझकर पढ़ने से दूर भागते है, जबकि कुछ बच्चों को गणित सीखने में आनंद मिलता है। ऐसा क्यों होता है? इसका कारण है– 'गणित' सीखने–सिखाने की प्रक्रिया मनोरंजक रूप से करने पर आनंद मिलता है, परन्तु ऐसा नहीं होने पर गणित नीरस और उबाऊ लगता है। गणित सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में मनोरंजन के साधन है– खेल, पहेलियाँ आदि।

7.5.1 खेलकर सीखना

बच्चे खेल–खेल में काफी कुछ सीखते हैं। अतः हमें विद्यालय में ऐसे खेलों को प्रोत्साहन देना चाहिए जिससे वे खेल–खेल में सही जानकारी लें व कौशल सीखें।

1. विभिन्न प्रकार के डिजाइन जो हम दीवारों या फर्श पर पेन्ट करवा सकते हैं।
   (i) डायस
   (ii) लूडो
   (iii) गिनतारा
   (iv) गोल तारा
   (v) संख्या खेल
   (vi) जादूई वर्ग आदि।

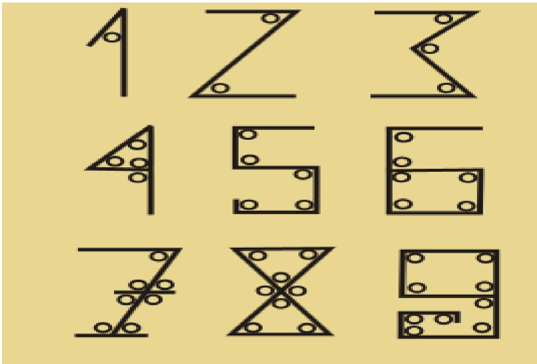
   साथ ही साथ बच्चों को खेलने के साथ–साथ इनके द्वारा मिलने वाली जानकारी पर भी जोर डालें।
2. शीशे : शीशों के उपयोग से बच्चों को दाएँ, बाएँ, ऊपर, नीचे, सीधा, उल्टा, लम्बा, पतला, मोटा आदि अनेक प्रत्यय समझाएँ जा सकते हैं। परंतु शीशों को बच्चों की लम्बाई के अनुसार लगाया जाना चाहिए।

गतिविधि –

वर्ग 'पहला' में पढ़ने वाले बच्चों को दो टीम में समूहन करेंगे। टीम का नामकरण क तथा ख या गुलाब–चमेली, गंगा–यमुना आदि कर सकते हैं। दोनों टीम से पाँच–पाँच बच्चो को कंकड़ के ढेर के पास ले जाकर कहेंगे कि तीन गिनने तक दोनों टीम के सदस्य सामूहिक रूप से अधिक से अधिक गिट्टी उठायेंगे। जो टीम अधिक संख्या में कंकड़ उठायेंगी, वह टीम विजेता बनेगी।

दोनों टीम निर्देशानुसार कार्य कर कंकड़ों को गिनती करते है। टीम क ने 45 कंकड़ तथा टीम ख ने 36 कंकड़ उठाए। टीम क द्वारा अधिक कंकड़ उठाने के कारण उसे विजेता घोषित किया गया। अब आप टीम के अन्य बच्चों के साथ इस गतिविधि को दुहराये। यहाँ पर हमने उस उदाहरण की चर्चा करी जिससे हम गिनती की समझ या अवधारणा को विकसित कर सकते हैं।

यहाँ पर हम कंकड़ों के जोड़े बनवाकर गिनवाने से सम संख्या एवं विषम संख्या को भी समझाया जा सकता है। साथ ही गुणजों एवं गुणनखंडों की अवधारणा को भी स्पष्ट किया जा सकता है। इन्हीं कंकड़ों के द्वारा शिक्षक बच्चों को कह सकते है कि अपने–अपने कंकड़ को जमीन पर रखकर समान अन्तर पर कंकड़ रखते हुए चौकोर और त्रिकोण आकृति बनाये। संख्याओं की समझ को कुछ इस तरह भी संबंधित किया जा सकता है – जैसा अंक उतने कंकड़।



इन गणितीय खेलों से बच्चे संख्याओं की समझ तथा ज्यामितीय आकृतियों जैसे त्रिभुज, चतुर्भुज इत्यादि को बनाना सीख सकेंगे तथा उनके गुणों से परिचित हो सकेंगे। इस गणितीय खेल के अवलोकन से पता चलता है कि–

- गणितीय अवधारणा की स्पष्टता कितनी है?
- कार्य में सभी बच्चों की सहभागिता है या नहीं?
- बच्चों में उत्साह चरम पर है या नहीं?
- बच्चों में गणित का भय और घबराहट समाप्त हो गयी या नहीं?
- सीखने में सहज है या नहीं?

प्रश्न : 'लूडो' के खेल से बच्चे संख्याओं के जोड़ की क्रिया सीख सकते है। कैसे?

प्रश्न : आप विद्यालय के बच्चों से बता करें और एक सारणी का निर्माण करें कि कौन–कौन खेल वर्ग–कक्ष के अंदर और कौन–कौन खेल वर्ग–कक्ष के बाहर खेले जा सकते हैं तथा इनसे कौन–कौन सी गणितीय आवधारणा की समझ विकसित हो सकती है।

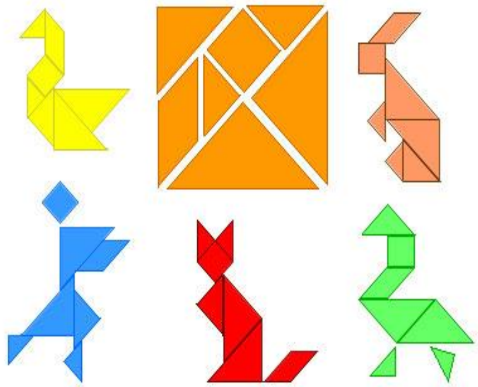
क्र0स0	वर्ग कक्ष के अन्दर का खेल	गणितीय अवधारणा की समझ	वर्ग कक्ष के बाहर का खेल	गणितीय अवधारणा की समझ
1.	लुड़ो	संख्याओं के क्रम की समझ, संख्याओं पर जोड़, घटाव	कबडड़ी	आयताकार क्षेत्र की समझ

		इत्यादि की समझ		
2.				
3.				
4.				
5.				

बच्चे मैदान में अनेक खेल खेलते हैं। जैसे– झूला–झूलना, कबड्डी, क्रिकेट, बॉलीबॉल मिले–मिले से राजा न मिले से चोर, खो–खो आदि। रंगोली बनाना भी कॉफी मनोरंजक है। बच्चे विभिन्न प्रकार कि रंगोली बनाते हैं। इससे बच्चे पैटर्न तथा ज्यामितीय आकृति वृत, त्रिभुज, आयत, वर्ग आदि का निर्माण करते हैं। जिससे उक्त ज्यामितीय आकृति के बारे में उनकी समझ विकसित होती है। खेल से बच्चों की गणितीय सोच और तर्क करने की क्षमता में तीव्र वृद्धि होती है। इससे अंदाज लगाने, पैटर्न पहचानने, विशिष्टीकरण करने व व्यापीकरण करने की क्षमताएँ विकसित होती है। इस प्रकार खेल बच्चों में गणितीय सोच का विकास करते है।

प्रायः देखा जाता है कि वर्ग कक्ष में बच्चे कागज को मोड़कर–फाड़कर विभिन्न आकारों का स्वरूप प्रदान करते है। वे कागज की नाव, टोपी, दवात, जहाज, डब्बा, खिलौने इत्यादि बनाते हैं। कागज मोड़ने की कला को ओरीगामी कहा जाता है। इससे द्वि–आयामी आकृति तथा त्रि–आयामी आकारों को समझाया जा सकता है। साथ ही शीर्ष, कोना, सतह आदि गणितीय पद को भी निरूपित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए टैनग्राम की सहायता से भी बच्चों को ज्यामितीय आकृतियों के बारे में समझाया जा सकता है –



प्रश्न : बच्चों को निम्नलिखित आवधारणा को सिखाने के लिए एक–एक खेल का उदाहरण दें।

- घटाव
- गुणा
- वृत

7.5.2 गणितीय खेल

गतिविधि– खिड़की खोलो झट से बोलो

एक पन्ने पर 1 से 100 तक संख्या लिखते हैं। फिर एक छोटा कागज के टुकड़े जिसमें खिड़कीनुमा छेद हो पन्ने पर सरकाया जाता है। बच्चे बारी–बारी से छेद के अंदर दिखाई देने वाले संख्या को बोलते है।

इस प्रकार 1 से 100 तक की संख्या पहचानने लगते है, जैसे नवासी छेद में दिखाई दे रहा है तो बच्चे बोलेंगे नवासी। इससे संख्या नामों की समझ विकसित होगी।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100								

पन्ने पर 1 से 100 तक की संख्या को बिना क्रम के भी लिख सकते हैं।

गणितीय खेल : तम्बोला

आजकल बच्चे संख्याओं पर आधारित खेल तम्बोला बहुत खेलते है। इसे दो या दो से अधिक बच्चे एक साथ खेल सकते है। इसमें एक आयताकार या वर्गाकार कागज की शीट पर कुछ वर्गाकार खाने बने होते हैं तथा उन खानों में कुछ संख्यांक लिखे होते है। हरेक बच्चे के पास अपनी अलग

शीट होती है। बच्चे एक बोर्ड पर रखे 1 से 100 तक के संख्यांको के कार्डों को पलटते रहते है तथा अपनी शीट के अंकों को काटते जाते है।

खेल के नियम पहले से ही निर्धारित होते है कि जिस बच्चे के सभी अंक सबसे पहले कट जायेगे, वह बच्चा विजयी होगा। जल्दी परिणाम के लिए कोई एक पंक्ति का भी नियम बनाया जा सकता है।

72	12	78	1	82
~~67~~	~~24~~	~~28~~	~~27~~	~~55~~
48	8	57	35	97
47	64	14	83	94

इस खेल संख्याकों की पहचान, उनको उनके नामों से जानना, संख्याओं के क्रम इत्यादि अवधरणाओं को सिखाया जा सकता है।

7.5.3 गणितीय पहेलियाँ

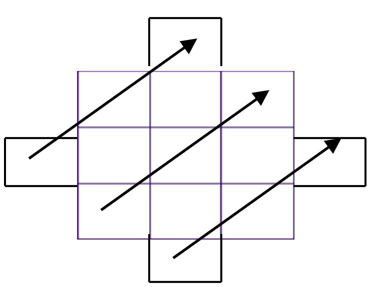
गणितीय पहेलियों से बच्चों में ताकिर्तता का विकास तथा रचनात्मकता का सृजन होता है। इससे गणितीय अवधारणाओं की समझ को चिरस्थायी बनाया जा सकता है।

उदाहरण : जादूई वर्ग का निर्माण

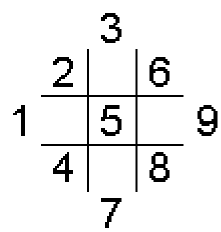
1. 3 × 3 का जादूई वर्ग बनाना

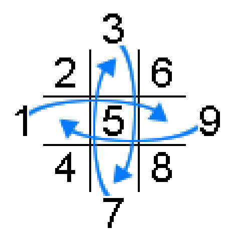
- सबसे पहले 3 × 3 का वर्ग बनायेंगे,

इसके बीच वाले खानों में 1–1 अतिरिक्त खाना जोड़ेगें तथा चित्रानुसार विकर्ण रूप में रेखा खीचेंगे।



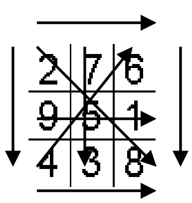
- 1–9 तक की संख्या को तीर के दिशा में लिखेंगे। फिर अतिरिक्त खाने के संख्या को आमने–सामने के खानों में लिखेंगे। इस प्रकार 3 × 3 का जादूई वर्ग तैयार हो जाएगा।





2	7	6
9	5	1
4	3	8

जाँच करें कि खडी लाइनों, पड़ी लाइनों तथा विकर्ण में आने वाली संख्याओं का योग एक समान है।

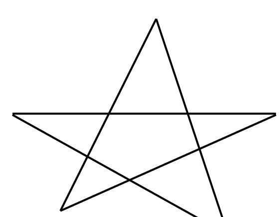


प्रश्न : अपने साथियों के साथ 4 × 4 का जादूई वर्ग बनाने पर चर्चा कीजिए।

सोचकर इन पहेलियों का जवाब दें–

एक बाग में पांच कतार हरेक में पेड़ लगे है चार
पूरे बाग में है कुल दस पेड़ कैसे बता मेरे यार

हल :



इस आकृति में जहां लाइने एक दूसरे को काट रहीं है उस स्थान पर पेड़ लगाना चाहिए।

प्रश्न : आप सोचकर बताये कि एक व्यक्ति के पास 12 पेड़ है। वह 6 पंक्तियों में चार–चार पेड़ लगाना चाहता है, तो वह किस प्रकार लगा सकता है?

इबारती प्रश्न के रूप में पहेलियां

किसी पेड़ की दो टहनियों पर कुछ पक्षी बैठे हैं। पहली टहनी पर बैठे पक्षी, दूसरी टहनी पर बैठै पक्षी से बोलता है कि तुम लोग में से कोई एक पक्षी आकर मेरे टहनी पर बैठे जाओं तो दोनों टहनी पर बराबर–बराबर पक्षी हो जाएगें। इस प्रकार दूसरी टहनी पर बैठे पक्षी कहता है कि तुम लोग (पहली टहनी) में से एक पक्षीं आकर हमारी टहनी पर आकर बैठ जाए है तो हमारी टहनी पर तुम्हारी टहनी पर बैठे पक्षियों की संख्या से दुगुने पक्षी हो जाएगें। अब बतायें कि दोनों टहनियो पर कितने–कितने पक्षी बैठे थे।

प्रश्न : शिक्षक अपने साथियों तथा मेंटर की सहायता से अध्ययन केन्द्र पर निम्नांकित प्रश्नों पर विचार करेंगे –

- संख्या 10 से 18 तक की संख्या लेकर 3 × 3 का जादुई वर्ग बनाये।
- 1 से 16 तक की संख्या से 4 × 4 का जादुई वर्ग बनाए।
- दैनिक समाचार पत्रों में दिये गये 'सुडोकू' के प्रश्न को हल करें।

पहेलियों की सहायता से तर्क एवं अनुमान लगाने की क्षमता का विकास करना

एक पेड पर एक चिडिया बैठी थी। आका"ा में चिडियों का एक झुंड उडते हुए जा रहा था। पेड पर बैठी चिडिया ने कहा कि अरे ओ एक सौ बहनों, थक गई होंगी आ जाओं आराम कर लो। इस पर झुंड में से एक चिडिया बोली, अरी बहन हम एक सौ नही है। यदि जितनी हम है उतनी ओर, हमारी आधी, हमारी चौथाई तथा तुम मिल जाओं तो हम एक सौ हो जायेगी। तो बताओ आका"ा में कुल कितनी चिडियां उड रही थी?

हल :

अनुमान लगाने की प्रक्रिया में आप पायेंगे कि

- चिडियों का आधा तथा चौथाई होना है तो कुल चिडियों की संख्या 4 से विभाजित होनी चाहिए।
- चिडियों की संख्या + चिडियों की संख्या + चिडियों की संख्या का आधा + चिडियों की संख्या का चौथाई = चिडियों की संख्या के तीन गुणे से कम
- चिडियों की संख्या अनुमान रूप में 33 तथा 38 के बीच में होनी चाहिए
- 34, 35, 36, 37 में 4 से विभाजित होने वाली संख्या 36
- कुल चिडियों की संख्या = 36

इस प्रकार अनुमान लगाने में बच्चे की तर्क"ाक्ति तथा गणितीय समस्या के समाधन करने की क्षमता का विकास होता है।

ICT आधारित गतिविधियाँ –

अध्ययन केन्द्र पर स्थित सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी कक्ष में जाइए। यदि आप कम्प्यूटर के बारे में जानते हो तो स्वयं से अन्यथा ऑपरेटर या साधन–सेवी की सहायता से भिन्न, दशमलव आदि

गणितीय अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए गणितीय खेल की रचना करें। कम्प्यूटर पर गणितीय खेल से संबंधित सी. डी. देखे और उसमें प्रयुक्त गणितीय अवधारणाओं पर चर्चा करें।

7.6 गणित के सन्दर्भ में अधिगम का आकलन

एक बच्चा चलने की कोशिश कर रहा है। वह कुछ पग/डग/ कदम बढ़ाता है। उसकी माँ ऊँगलियों का इशारा कर रही है। कुछ देर के बाद वह उसे ऊँगली पकड़ा देती है। स्पष्ट है कि माँ ने अनुमान कर लिया था कि बच्चा कुछ इतने कदमों के बाद गिर सकता है। माँ ने उसके पहले ही ऊँगली बच्चे को पकड़ा दी। क्या बच्चे को चलना सिखाने के क्रम में माँ की कितनी भूमिका है?

इसी प्रकार एक कक्षा को लें। शिक्षक कुछ पढ़ाते हैं। एक क्षण के लिए रूकते हैं। बच्चों के चेहरे से, हाव–भाव से अनुमान करते हैं कि बच्चों ने कितना सीखा? इसी के आधार पर वे सिखाने की क्रिया में बदलाव लाते हैं और आगे बढ़ते हैं। शिक्षक का यही अनुमान आकलन है जो कक्षा में निरन्तर चलता रहता है। निश्चित ही इस तरह के आकलन के अभाव में शिक्षक के सिखाने की क्रिया को आगे नही बढ़ा या जा सकता है।

'बच्चे कैसे सीखते हैं?', इसके बारे में शिक्षक अपने परिवार में, समाज में, विद्यालय में देखते हैं, यह भी देखते हैं कि उनके माता–पिता या परिवार के लोग हर समय सीखने का आकलन किस प्रकार करते हैं? शिक्षक जब कक्षा में आते हैं, तो उन्हें यह अनुभव कक्षा के बच्चों के सीखने के क्रम में आकलन करने में सहायक होता है।

आइए, दो कक्षाओं का तुलनात्मक अध्ययन करें। एक कक्षा में शिक्षक पाठ्यपुस्तक की सहायता से लगातार बच्चों को बताए जा रहे हैं, वे रूकते नही हैं, ज्यादा–से–ज्यादा अपनी बातों को स्पष्ट करने की कोशिश करते हैं और अनुमान करते हैं कि उन्होंने जो कुछ भी बच्चों को सिखाया, सभी बच्चे सीख गये, वे अपनी सिखाने की प्रक्रिया में भी कोई बदलाव नहीं लाते।

अब दूसरा दृश्य देखें। बच्चे कक्षा में बैठे हुए हैं। शिक्षक पाठ सिखाने के क्रम में थोड़ी–थोड़ी देर बाद रूकते हैं। बच्चों के चेहरे का भाव पढ़ते हैं, कुछ सवाल करते हैं और हर बात का अनुमान करते हैं कि उनके बच्चों ने क्या सीखा। इसके आधार पर वे यह भी तय करते हैं कि उनके सिखाने की प्रक्रिया कितनी सफल रही?

प्रश्न : दोनों कक्षाओं को देखने के बाद आप अनुमान लगायें कि–

(i) कौन–सी कक्षा बेहतर है और क्यों?

(ii) दोनों कक्षाओं में कहाँ पर आकलन का कार्य हो रहा है और यह कितना उपयोगी है?

क्या आपको लगता है कि आकलन को और उपयोगी बनाने हेतु कुछ विचार करने की आवश्यकता है? क्या इस विमर्श में निम्न बिन्दुओं को शामिल करना सार्थक होगा–

- बच्चे की व्यक्तिगत और विशेष जरूरतों को पहचानना– जैसे कोई भी बच्चा क्या कर सकता है? उसकी किन चीजों में विशेष रूचि है? इनके सम्बंध में समझ बनाना।
- विभिन्न विषयों में एक ही कालावधि (समय) में बच्चे की प्रगति और उसमें आनेवाले परिवर्तनों का पता लगाना।
- सीखने–सिखाने की विभिन्न स्थितियों की योजना बनाकर इसके लिए अधिक उपर्युक्त तरीके ढूँढ़ना।

- परीक्षणों के प्रति बच्चों के अन्दर व्याप्त भय को दूर कर उन्हें स्व–आकलन के लिए प्रेरित करना।
- प्रत्येक बच्चे के विकास में मदद करना और सुधार की संभावनाएँ खोजना।

आओ कुछ सवालों पर विचार करते हैं–

अधिकांश बच्चे गणित शब्द से घबराते है, क्यों ? क्या उन्हें गणित विषय नीरस या उबाऊ या कठिन लगता है? बच्चे गणित विषय में फेल होने से डरते है? क्यों? क्या इसके लिए गणित पाठ्यचर्या या इसका मूल्यांकन पद्धति दोषी है? क्या गणित शिक्षण पद्धति दोषी है ?
आप कैसे पता लगाते हैं कि बच्चे सीख रहे हैं?

- आप बच्चो का मूल्यांकन क्यों करते है? यदि किसी बच्चे के 100 में से 32 तथा दूसरे बच्चे के 100 में से 33 अंक आते हैं, तो इससे आपको बच्चे के बारे में क्या–क्या पता चलता है?
- मूल्यांकन से बच्चो के बारे में और क्या–क्या जानकारी मिलती है?
- क्या प्रचलित परीक्षा प्रणाली में बच्चों के व्यक्तित्व के सभी पहलुओं की प्रगति को जानने का कोई तरीका है?
- यदि कोई बच्चा किसी भी कारण से परीक्षा में अनुपस्थित रहता है तो उसका मूल्यांकन किस प्रकार किया जाता है?

जब आप सोच रहे होंगे तो आपको लगेगा कि मूल्यांकन सीखने की प्रक्रिया का हिस्सा होना चाहिए। मूल्यांकन न केवल बच्चे के लिए अपितु शिक्षक के लिए भी सीखने सिखाने की प्रक्रिया का मार्गदर्शन करे। मूल्यांकन बच्चे को सफल एवं असफल की श्रेणियों में ना बांटकर सीखने की दिशा में निरन्तर गतिशील एवं सुदृढ़ करने में मदद करे।
शिक्षा का महत्वपूर्ण लक्ष्य बच्चो को गुणवत्ता पूर्ण शिक्षा प्रदान करना है। अतः विद्यालय में औपचारिक शिक्षण–प्रशिक्षण के दौरान बच्चों द्वारा अर्जित ज्ञान का मूल्यांकन करना आवश्यक है। मूल्यांकन पाठ्यचर्या का एक मुख्य हिस्सा है। मूल्यांकन के आधार पर ही पता लगाया जा सकता है कि बच्चो ने किस हद तक सार्थक ढंग से गुणवत्ता पूर्ण ज्ञानार्जन किया है। प्राथमिक स्तर पर गणित की अवधारणाओं पर चर्चा करने के पश्चात् हम बच्चे के व्यक्तित्व में किस प्रकार का बदलाव देखना चाहते हैं तथा बच्चे की सुदृढ़ व्यक्तित्व निर्माण की नींव रखने में प्राथमिक कक्षा में विभिन्न विषयों में अर्जित ज्ञान किस हद तक सहायक है? इन सब प्रश्नों का उत्तर अध्यापक विद्यार्थी द्वारा सीखी गई अवधारणाओं एवं उन अवधारणाओं का उसके द्वारा अपने व्यावहारिक जीवन में उपयोग द्वारा मूल्यांकन करके प्राप्त किया जा सकता है।

प्राथमिक कक्षाओं में मूल्यांकन की निम्नांकित उद्देश्य हो सकते हैं –

– यह जानना कि बच्चे ने कितना सीखा है?
– बच्चे की व्यक्तिगत विशेषताओं को जानना।
– बच्चों के सीखने के तरीकों, कठिनाइयों को पहचानना तथा उसके अनुसार उसकी मदद करना।
– कक्षा में सीखने–सिखाने की विधि को बेहतर बनाना।
– प्रत्येक बच्चे के सीखने–सीखाने की प्रक्रिया की पहचान करना व उसमें अपेक्षित सुधार कर उनके विकास में सहयोग करना।
– बच्चों में आत्मविश्वास का भाव जागृत करना।

बच्चों के सीखने का आकलन करते समय किस–किस बात का ध्यान रखना है, यह जानना बहुत जरूरी है। बच्चे के सीखने का स्तर और विकास के स्तर को जानने के लिए निम्न बिंदुओं पर ध्यान देना जरूरी है –

– बच्चो द्वारा सीखी गयी अवधारणाओं का दैनिक जीवन की समस्याओं के समाधान में उपयोग करने की क्षमता और एक निश्चित समयावधि में उसके प्रगति का स्तर।
– बच्चे के व्यक्तित्व विकास में विभिन्न पक्षों का आकलन।
– बच्चे का सीखने, विषय व स्वयं के प्रति दृष्टिकोण।
– विभिन्न परिस्थितियों तथा मौकों पर बच्चे की प्रतिक्रिया।

7.6.1 मूल्यांकन के लिए समय निर्धारण

मूल्यांकन कब किया जाए? इसकी समयावधि क्या होनी चाहिए? मूल्यांकन कितनी देर तक करना चाहिए? आकलन के लिए मूल्यांकन समयावधि निर्धारित करना बहुत जरूरी है। मूल्यांकन दो प्रकार से किया जा सकता है –

1. **दैनिक मूल्यांकन** – बच्चो के कक्षाकक्ष संबंधी गतिविधियों का प्रतिदिन आकलन विद्यालय के भीतर व बाहर के परिस्थितियों में सतत रूप से करना।
2. **आवधिक मूल्यांकन** – विद्यार्थियों के सीखने का मूल्यांकन एक निश्चित समयावधि के भीतर किया जाता है।

7.6.2 बच्चों की भागीदारी के आधार पर मूल्यांकन के प्रकार

व्यक्तिगत मूल्यांकन – इसमें किसी विशेष बच्चे की गतिविधियों, सीखने के तरीकों तथा उपलब्धि का आकलन किया जाता है।

समूह मूल्यांकन – इसमें किसी विशेष समूह के बच्चों की गतिविधियों, सीखने के तरीकों तथा उपलब्धि का विशेषकर समूह कार्यों में भागीदारी, नेतृत्व क्षमता का आकलन किया जाता है।

सहपाठियों द्वारा मूल्यांकन – इसमें कोई बच्चा दूसरे बच्चे या बच्चो के एक समूह की गतिविधियों, सीखने के तरीकों का आकलन करता है।

7.6.3 मूल्यांकन की प्रक्रिया –

मूल्यांकन के बहुत से उपकरण हो सकते हैं। यह अध्यापक पर निर्भर करता है कि वह विद्यार्थियों के आवश्यकताओं पर परिस्थितियों के आधार पर किस तकनीक का प्रयोग करता है। मूल्यांकन के बाद परिणाम को शिक्षक द्वारा दर्ज करके बच्चो, माता–पिता व अन्य को बताया जाना चाहिए।

सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का मूल्यांकन

एक दिन मैं पास के एक स्कूल में कक्षा 2 के बच्चों से मिलने गई थी। मैंने देखा कि उनमें से कई बच्चे 'आधे' की अवधारणा को ठीक से समझ नहीं पाए थे। शिक्षक से बात करने पर पता चला कि उन्होंने संबंधित गतिविधियों के जरिये यह अवधारणा बच्चों को सिखाई थी। फिर भी बच्चे अवधारणा को समझ नहीं पाए थे। शिक्षक को यह बात तभी पता चली जब मैंने उन्हें बताया। ऐसा क्यों हुआ? क्या सिर्फ गतिविधियां दे देने से सुनिश्चित हो जाता है कि बच्चे सीख जाएंगे? आप यह पक्के तौर पर कैसे कह सकते हैं कि आप जो कुछ सिखाना चाहते थे, वह बच्चों ने सीख लिया हैं? इस भाग में हम इन्हीं सवालों पर ग़ौर करेंगे।

अपने अनुभव से आप जानते हैं कि यह हमेशा सम्भव नहीं होता कि हमारी योजना के अनुसार सीखने का माहौल बन जाए। कई बार यह ऐसे कारणों से होता है, जो आपके बस में नहीं हैं। हर मर्तबा जब कोई पाठ योना के मुताबिक नहीं चलता, तो अपको इसके कारणों की छानबीन करनी चाहिए। क्या यह शिक्षण साधनों की कमी की वजह से हुआ? या गतिविधियों की गलत डिज़ाइन की वजह से हुआ? या कक्षा के संयोजन व प्रबंधन की दिक्कतों की वजह से हुआ ? या और कोई कारण था?

चित्र 2 : शिक्षक ''तो बच्चों तुमने सीखा कि ......'' बच्चे (चकराकर) : ''क्या सचमुच?''

कई मर्तबा गतिविधियों का अपेक्षित असर नहीं होता क्योंकि समय कम पड़ जाता है और शिक्षक को सिलेबस आगे बढ़ाने की हडबड़ी होती हैं लेकिल कारगर शिक्षण के लिए जरूरी है कि बच्चों को सही ढंग से चुनी हुई गतिविधियाँ दी जाएं, और इन्हें करने के लिए तथा इनसे सीखने के लिए काफी समय दिया जाए। यदि कोई गतिविधि अच्छे से चल रही है और बच्चे उसमें जुटे हुए हैं, तो इसे योजना के हिसाब से ज्यादा वक्त भी दिया जा सकता है। यह भी हो सकता है कि गतिविधि कुछ ऐसी हो कि उसे पूरी कक्षा के साथ नहीं किया जा सकता। यहीं पर योजना में लचीलेपन का फायदा होता है। यदि एक योजना नहीं चल रही है, तो दूसरी आज़माई जा सकती है !

किसी भी सिखाने के तरीके का एक जरूरी हिस्सा होता है उसके असर का मूल्यांकन। सीखने–सिखाने की प्रक्रिया कारगर है या नहीं, इसका फैसला करने के लिए आप खुद से कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं :

- क्या बच्चों को पाठ में मज़ा आ रहा है?
- क्या वे सवाल कर रहे है और गतिविधियों में पहल कर रहे हैं?
- क्या आपके द्वारा पूछ गए सवालों का जवाब देने के लिए उन्हें काफी समय मिल रहा है?
- क्या उन्हें, वे जो कुछ कर रहे हैं, उसके बारे में सोचने के लिए बढ़ावा मिल रहा है?

प्रश्न : अपने सिखाने के तरीके का मूल्यांकन करने के लिए आपको कई और अहम सवालों को पूछने की जरूरत है। क्या आप इन सवालों की सूची बना सकते हैं?

हमें यह नहीं भूलना चाहिए कि अगर शिक्षक विद्यार्थियों को ध्यान में रखकर सिखाएं तो सीखने–सिखाने की प्रक्रिया पर उसका बहुत अच्छा असर होता है। इसलिए हमें बारम्बार खुद से पूछते रहना चाहिए कि :

- क्या बच्चों को समझाने की कोशिश में मैं, एक शिक्षक के नाते, अपनी भाषा में बदलाव करती/करता हूँ?
- क्या मैं उन्हें सवाल बनाने देती/देता हूँ?
- क्या मैं उन्हें इस बात का मौका और समय देती/देता हूं कि, जो कुछ मैंने उन्हें पढ़ाया है, वे उसके बारे में सोच सकें और बात करें?

प्रश्न : अपने सिखाने के तरीके के सही मूल्यांकन के लिए और कौन से शिक्षक केंद्रित सवाल पूछे जाने चाहिए?

बच्चों की समझ को जांचना और उसका मूल्यांकन करना शिक्षण का अभिन्न अंग होना चाहिए। शिक्षकों को यह पक्का कर लेना चाहिए कि क्या वास्तव में उन्होंने यह सब कुछ पढ़ा दिया है, जो वे सोचते हैं कि उन्होने पढ़ाया है और यह भी तय कर लेना चाहिए कि क्या हर बच्चे ने वह सब सीख लिया है जिसकी उससे उम्मीद थी। जैसे, हो सकता है कि मूल्यांकन के ज़रिये शिक्षक को पता चले कि करीब एक–चौथाई बच्चे 'आधे' की अवधारणा पकड़ नहीं पाए हैं। तब उन्हें एक बार फिर उन बातों से शुरू करना होगा, जिनसे बच्चे पहले से परिचित हों। इस बार शिक्षक नए तरीके आज़माने का फैसला कर सकती है, जैसे कि अलग–अलग बच्चों को उनकी ख़ास जरूरतों के अनुसार अगल–अलग वर्कशीट दी जा सकती है, या मित्रों से सीखने का तरीका अपनाया जा सकता है। शिक्षक को इस बात का एहसास भी होना चाहिए कि कब किसी बच्चे को ठोस चीज़ों के इस्तेमाल की जरूरत है, और जरूरत के मुताबिक उस बच्चे को इसका मौका देना होगा।

यानी, बच्चों का मूल्यांकन जरूरी है, लेकिन यह उपयोगी तभी होता है जब आप इसका असर अपनी शिक्षण प्रक्रिया पर पड़ने दें। सिफ 'अच्छा', या 'औसत' ठहराने के मकसद से किया गया मूल्यांकन (जैसा कि आम तौर पर होता है) ज़्यादा उपयोगी नहीं होता। मूल्यांकन के जरिये यह समझने की कोशिश करनी चाहिए कि किस हद तक हर बच्ची अपनी गणितीय क्षमताएं विकसित कर पाई है। इसलिए मूल्यांकन के दायरे में अलग–अलग तरह के गणितीय कार्य शामिल किए जाने चाहिए। मूल्यांकन में बच्चों को ऐसी समस्याओं से निपटने का मौका मिलना चाहिए जिनमें उन्हें कई गणितीय बातों का इस्तेमाल करना पड़े। उनकी योग्यता जानने के लिए आप ऐसी तकनीक अपना सकते हैं जिनसे कई क्षमताओं की जांच साथ–साथ हो सकती है। इनमें बच्चों के लिए बहुत बोझिल कार्य न हो। लिखित व मौखिक कार्य भी शामिल हो सकते हैं।

यानी, मूल्यांकन प्रक्रिया से आपको यह देखने में मदद मिलनी चाहिए कि क्या शिक्षण के सारे निर्धारित लक्ष्य हासिल हो गए हैं? दरअसल हर कदम पर मूल्यांकन आपकी सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का हिस्सा होना चाहिए। इस प्रक्रिया के दौरान मूल्यांकन के लिए बच्चों से उनकी प्रतिक्रियाएं बार–बार लेते रहना चाहिए। इस तरह के मूल्यांकन से आपको यह पता लगता रहेगा कि बच्चे की समझ में कोई गलती तो नहीं है, या उसे किसी तरह की मुश्किल तो नहीं आ रही है। और यह बात आपको उसी समय पता लग जाएगी जब यह ग़लती या दिक्कत सामने आएगी, और समय रहते उसका सुधार कर सकेंगे। इससे काफी समय और मेहनत की बचत होगी। ख़ासकर गणित जैसे विषय में ऐसे उपाय जरूरी होते हैं क्योंकि इनमें अवधारणाएं एक निश्चित क्रम में विकसित होती हैं।

सिखाने के दौरान मूल्यांकन के अलावा आपको समय–समय पर परीक्षा भी करनी होगी। इससे आपके विद्यार्थियों को तो शिक्षण के उद्देश्य हासिल करने में मदद मिलेगी ही, साथ में आप भी अपने शिक्षण का मूल्यांकन कर पाएंगे, हर बच्चे की समस्या को पहचान पाएंगे और उन्हें सुलझाने में बच्चों की मदद कर पाएंगे।

ऊपर दी गई चर्चा के बाद आप इस बात से जरूर समहत होंगे कि बच्चों का मूल्यांकन सिर्फ सत्र या साल के आखिर में करने की बजाय पूरे साल भर करना जरूरी है। सत्र के अंत में किए गए मूल्यांकन से न तो बच्चों को मदद मिलती है और न ही शिक्षक को।

प्रश्न : एक आठ साल की बच्ची को आप समय का मापन सिखा रहें हों, तो सिखाने के दौरान उसका मूल्यांकन कब–कब करेंगे?

इसके साथ ही हम शिक्षण के व्यावहारिक पहलुओं की चर्चा समाप्त करेंगे। आइए इस इकाई में की गई बातों को सार रूप में दोहरा लें।

प्रश्न : मूल्यांकन का सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में कितना महत्व है? चर्चा कीजिए।

छब्त्ज के अनुसार मूल्यांकन प्रक्रिया में मुख्यतः निम्न तीन बातों के संबंध में निर्णय किया जाता है –

1. शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति किस सीमा तक हुई ?
2. उद्देश्य प्राप्त करने की विधि कितनी प्रभावी रही ?
3. अधिगम–अनुभव कितने प्रभावी उत्पादक रहे ?

सीखने और सिखाने के प्रक्रिया में मूल्यांकन में निम्नांकित उद्देश्य है –

- बच्चों के सीखने की प्रक्रिया की पहचान करना व उनका उचित मार्गदर्शन करना।
- बच्चों के व्यवहारगत् पक्षों को विकसित करना।
- बच्चों के मजबूत एवं कमजोर पक्षों की पहचान करना।
- बच्चों की सीखने की कठिनाइयों की पहचान करना।
- सीखने–सिखाने की विधियों को सुधार करके उन्नत बनाना।
- निदानात्मक व उपचारात्मक कार्यक्रम तैयार करना।

शिक्षा बच्चों के समझ के विकास से जुड़ी हुई है– शारीरिक, सामाजिक, भावात्मक एवं संज्ञानात्मक। अतएंव यह आवश्यक है कि सभी पहलूओं का आकलन किया जाए। शैक्षिक उपलब्धि के साथ–साथ सह–शैक्षिक उपलब्धि का भी। इस प्रकार विद्यालय के अन्दर और विद्यालय के बाहर होने वाली सभी गतिविधियाँ जिनमें बच्चों की भागीदारी होती है, उनका आकलन किया जाना चाहिए, साथ ही आकलन की प्रक्रियाओं को सूचना और प्रतिपुष्टि का स्त्रोत भी बनाना चाहिए।

प्रश्न : उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखते हुए बताऐं कि अधिगम की पूरी तस्वीर को समझने के लिए किन–किन बिन्दुओं का आकलन करना आवश्यक होगा?

बच्चों के अधिगम की पूर्णतः समझ के आकलन के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं पर विचार करना पर्याप्त होगा–

- विभिन्न विषयों एवं क्षेत्रों में बच्चों का प्रदर्शन।
- बच्चो के कौशल, रूचियाँ, रूझान आदि।
- अवधि विशेष में बच्चों के व्यवहार में होने वाले परिवर्तन।
- विद्यालय के भीतर और बाहर विभिन्न अवसरों पर बच्चों की प्रतिक्रिया।

इसी के साथ जुड़ा हुआ एक महत्त्वपूर्ण प्रश्न यह भी है कि बच्चों के सीखने की प्रक्रिया और प्रगति का कब और कैसे आकलन किया जाय? चूँकि सीखने के परिणामों का आकलन अधिगम प्रक्रिया के साथ सतत रूप से जुड़ा हुआ है, समग्र रूप से आकलन करने के लिए सभी पहलूओं को उचित स्थान देने के लिए प्रत्येक बच्चे का प्रोफाइल बनाना उचित हो जाता है। इसके लिए कालखण्ड तय करना पड़ेगा और उसके अनुसार कार्य करना पड़ेगा। कक्षा में अनौपचारिक अवलोकन, आकलन तो चलता ही रहनी चाहिए लेकिन एक खास अवधि के अन्त में विशेष रूप से समीक्षा कर लेना जरूरी होगा।

हम जानते हैं कि बच्चे अपने ढ़ंग से ही सीखते हैं और वे सिर्फ स्कूल में नहीं सीखते हैं– सतत् सीखतें रहते हैं। आवश्यक है कि हम सीखने के स्त्रोतों की जानकारी इकठ्ठी करे साथ ही तरह–तरह की गतिविधियों, अनुभवों एवम् अधिगम कार्य कलापों की जानकारी इकठ्ठी करें। बच्चों से भी कहा जा सकता है कि वे उन कार्यो को चयन करें जो उनकी नजर में सर्वोत्तम है,और उनसे पूछें कि उन कार्यो का चयन क्यो किया। यधपि शिक्षक सूचनाओं के मुख्य स्त्रोत होते हैं, फिर भी बच्चों के स्वयं का आकलन अपना विशेष स्थान रखता है।

शिक्षक एवं अन्य व्यक्तियों के साथ बात–चीत कर इन्हें भी आकलन की प्रक्रिया में शामिल किया जा सकता है–

- समुदाय के लोग।
- माता–पिता/अभिभावक।
- अन्य शिक्षक।
- बच्चों के समवय समूह।
- स्वयं बच्चा।

7.6.4 कक्षा कक्ष में प्रयोग में लायी जाने वाली आकलन की कुछ प्रविधियाँ

बच्चे क्या सीख रहे हैं, कैसे सीख रहे हैं, इसके लिए कौन–सी शिक्षण अधिगम प्रक्रिया अपनायी जा रही है, इन सारी बातों को जानने के लिए आकलन का सहारा लेना पड़ता है। स्पष्ट है कि अधिगम तभी होता है, जब कुछ बच्चे कुछ सोचते हैं, समस्या को हल करते हैं, रचना करते हैं, जाँच करते हैं, विश्लेषण करते हैं, खोज करते हैं, तो आकलन में इन सारी चीजों का समावेश करना आवश्यक हो जाता है। हम आकलन की क्रिया के दौरान निश्चित रूप से कोई–न–कोई तकनीक अपनाते है।

आकलन की कुछ तकनीकें निम्न हो सकती हैं –

- अवलोकन।
- समवयसमूह द्वारा।
- परियोजना कार्य।
- औपचारिक बात–चीत।

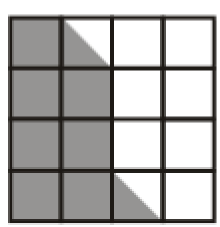
इन सभी तकनीकों के द्वारा बच्चे का आकलन कक्षाकक्ष प्रक्रिया के दौरान ही संभव है जैसे– बच्चो से प्रश्न पूछकर आकलन करना।

उदाहरण रूप में भिन्नों की अवधारणा का आकलन

1. **किसी सम्पूर्ण के बराबर हिस्से करना**

   बच्चो को 4 × 4 वर्ग बनाने को कहें तथा उसके दो बराबर भाग भिन्न–भिन्न प्रकार से करने को कहें –

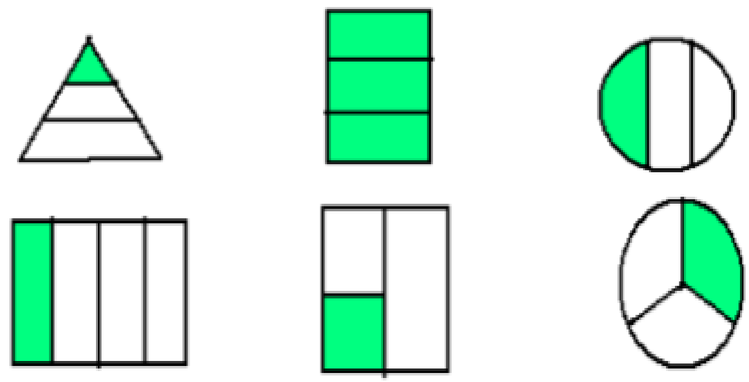
   सामान्य रूप में बच्चे खडी लाइन, पडी लाइन तथा विकर्णों की सहायता से आधा या दो बराबर भाग करते हैं, परन्तु कुछ बच्चे इस प्रकार का एक अलग उत्तर प्रस्तुत कर सकते हैं –



   बच्चो द्वारा दिये गए उत्तरों का अवलोकन कीजिए तथा कक्षा कक्ष में चर्चा कीजिए कि कौन सा उत्तर गलत है और कौन सा सही। इससे बच्चो को कई अन्य तरीकों से आधे की समझ विकसित हो जायेगी।

2. **दिये गए चित्रों में दी गई भिन्न पहचानना**

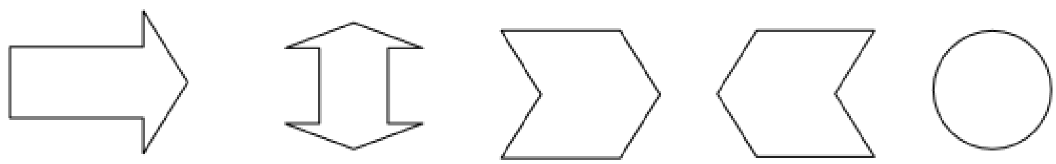
   बच्चो को नीचे दी गयी आकृतियों में एक तिहाई पर निशान लगाने को कहें –



बच्चो द्वारा दिये गए उत्तरों का अवलोकन कीजिए तथा कक्षा–कक्ष में चर्चा कीजिए कि कौन–सा उत्तर गलत है और कौन सा सही?

3. दी गयी आकृतियों में रंग भरवाकर भिन्नों को पहचानना

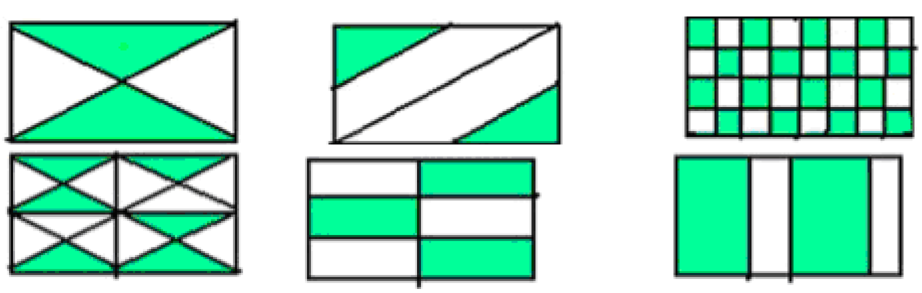
बच्चो को नीचे दी गयी आकृतियों में आधे में रंग भरने को कहे –



बच्चो द्वारा दिये गए उत्तरों का अवलोकन कीजिए तथा कक्षा कक्ष में चर्चा कीजिए।

4. समतुल्य भिन्न की पहचान करना

दिए गए चित्रों में आधा या 1/2 के समतुल्य भिन्नों पर निशान लगाए –



उत्तरों का विश्लेषण करके बच्चों को पृष्ठपोषण दिया जा सकेगा तथा अवधारणाओं के सिखाने के संबंध में आगे की योजना बनायी जा सकेगी। प्र”न पूछकर ि”ाक्षक अपनायी गयी ि”ाक्षण विधि, बच्चो की अवधारणात्मक समझ तथा बच्चों द्वारा सीखी गयी अवधारणा का दैनिक जीवन में प्रयोग इत्यादि का बहुत आसानी से आकलन कर लेता है। प्र”न पूछने का समय ि”ाक्षक द्वारा निर्धारित किया जाता है। कभी यह अवधारणाओं के विकास के साथ–साथ तथा कभी यह बिल्कुल अन्त में होता है।

परीक्षण पदों के द्वारा आकलन

बच्चों का आकलन विभिन्न प्रकार के प्रश्नों के द्वारा भी किया जाता है। ये प्रश्न कई प्रकार के होते हैं। सामान्य रूप में हम इन प्रश्नों को दो प्रकारों में बांट सकते है –

एक निश्चित उत्तर वाले प्रश्न

इस प्रकार के पदों का केवल एक नि”ाचत उत्तर होता है, जैसे –

- 50, 40 व 30 को जोड़िए।
- 40, 45 और 35 का म. स. ज्ञात कीजिए।
- 44 को 8 से गुणा कीजिए।

बहुविकल्पीय पदों में उत्तर के रूप में चार विकल्प दिये होते हैं, जैसे –

- **संख्या 33 पूर्णतया किस संख्या से विभाजित होती है–**
  क. 4 से
  ख. 9 से
  ग. 6 से
  घ. 3 से
- आयत की चारों भुजाए बराबर होती हैं। (सत्य/ असत्य)
- 23 एक सम संख्या है। (हां/ नहीं)

इसी तरह के कुछ अन्य प्रकार के प्र"न जैसे मिलान करना, खाली स्थान भरना, क्विज इत्यादि भी बच्चो के आकलन हेतु पूछे जा सकते हैं। इस प्रकार के प्रश्न जानकारी पर आधारित होते हैं। इस प्रकार के पदों का उत्तर देने के लिए बच्चे को उन तथ्यों या सूचनाओं का पुनः स्मरण करना पड़ता है।

प्रश्न : कक्षा–4 की गणित की पाठय पुस्तक से किसी अवधरणा पर चार बहुविकल्पीय परीक्षण पदों का निर्माण कीजिए।

ऐसे प्रश्न जिनके एक से अधिक उत्तर हों जैसे –

- तीन अंकों का जोड़ 48 है। वे अंक कौन से है?
- उन दो संख्याओं को पहचानिए जिनका गुणनफल 24 है।
- एक संख्या को 4 से भाग देने पर 3 शेष बचता है, यह संख्या क्या हो सकती है?
- ...... +.........+.......= 20

आओ इस पद पर ध्यान दें –

...... +.........+.......= 20

हल – ऊपर दिये प्रश्न का उत्तर कुछ बच्चो ने इस प्रकार लिखा है –

विद्यार्थी 1 10 + 5 + 5
विद्यार्थी 2 11 + 5 + 4
विद्यार्थी 3 10 + 6 + 4
विद्यार्थी 4 9 + 6 + 5
विद्यार्थी 5 8 + 6 + 6, 6 + 7 + 7, 10 + 5 + 5, 4 + 8 + 8

पांचो बच्चो द्वारा दिये गये सभी उत्तर ठीक है। जबकि अंतिम बच्चे ने तीन उत्तर दिये है और सभी ठीक है। बच्चो को मौका देने से वे एक से अधिक संभावनाओं के बारे में सोचते है।

प्रश्न : बच्चो को ऐसे प्रश्न हल करने के लिए देने का क्या लाभ है जिनके एक से अधिक उत्तर होते है?

आपके द्वारा बनाई सूची का निम्नलिखित विशेषताओं से मिलान कीजिए –

- इससे बच्चों के सोचने का दायरा बढ़ता है।
- बच्चे कम से कम एक हल तो प्रस्तुत कर ही सकते हैं। इस प्रकार बच्चो का आत्मविश्वास बढ़ता है।

- जब समस्याओं को उनके परिवे"ा या वास्तविक जीवन के अनुभवों से जोड़ा जाता है, तो बच्चे अनेक तरीकों से सोचते है।
- बहुत से उत्तर आने का अर्थ है कि प्रत्येक बच्चा अपने अनुभव के अनुसार सोच सकता है।
- बच्चे की सोच और गणितीय समस्या के समाधन करने की क्षमता का पता चलता है।

प्रश्न : गणित में कक्षा–3 के बच्चों के लिए एक से अधिक उत्तरों वाले 4 प्रश्नों की रचना कीजिए। ये प्रश्न अपने विद्यालय के कक्षा–3 के बच्चों के समक्ष दीजिए। उनके द्वारा दिए गए उत्तरों को विश्लेषित कीजिए।

गणित संबंधी आकलन प्रक्रिया में परीक्षा परिणामों का उपयोग–

एक बच्चे ने गणित संबंधी एक मानक परीक्षण को पूरा किया तथा उसकी प्रगति का विवरण निम्न प्रकार रहा–

कुल अंक	प्राप्त अंक	अंकों का प्रतिशत	ग्रेड या अंकन
20	18	90	A^+

आप जरा सोचिए कि आप बच्चे के प्रगति विवरण संबंधी क्या क्या सूचनाएं एकत्र करते हैं?
ऊपर दिखाए गए प्रगति विवरण से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते है?
ि"ाक्षक ने बच्चों के उत्तरों का वि"लेषण करके बच्चे के अभिलेख में सूचना दर्ज की कि बच्चे को गणित की किस वि"ोष अवधारणा को अधिक ध्यान से समझने या स्पष्ट करने की आव"यकता है। बच्चे के सही आकलन हेतु केवल प्रगति विवरण देकर ही संतुष्ट नही होना चाहिए अपितु बच्चे ने किस अवधारणा को नही समझा है या किसमें उसकी समझ कम बनी है, ये सभी सूचनाएं भी ध्यान में रखी जानी चाहिए ताकि बच्चे द्वारा कम या बिल्कुल न सीखी गई अवधारणाओं को सिखाने हेतु अतिरिक्त प्रयास किया जा सके।

स्व आकलन हेतु प्रश्न पूछना

ि"ाक्षक कक्षा में ज्यामितीय आकृतियों पर चर्चा कर रहा था। आकृतियों से संबंधित अध्याय की समाप्ति के प"चात ि"ाक्षक ने बच्चों को अपने आप सोचने तथा आपस में बात करने के लिए प्रेरित किया। अध्यापक ने कुछ प्र"न बच्चों के सामने रखे –

- मैं कहां रूक जाता हूं
- मैने अब तक क्या कर लिया है
- मै किससे सहायता लूं
- मैने क्या नयी अवधारणा सीखी

ि"ाक्षक ने बच्चों को विचार विमर्श करने के लिए कुछ समय दिया और वह बच्चों की बातों को ध्यानपूर्वक सुनने लगे।

राम – आकृतियों के गुणों को याद रखना मु"िकल है।
कमल – चौकोर आकृतियों के नाम याद रखना मु"िकल है।
रानी – मैने आकृतियों के नामों को पढा है पर मैं याद नही कर पायी।
रीता – मैने अभी अभी किताब में पढ़ा है, तब भी याद नही।
कालू – मैने आयत के गुणों को याद कर लिया है।
सलमा – वर्ग एवं आयत में कोई फर्क नही होता है।

बच्चों की इस चर्चा के बाद ि"ाक्षक ने आकृतियों से संबंधित अवधारणाओं को माडल, चित्रों की सहायता से पुनः स्पष्ट किया। इसके बाद कम्प्यूटर पर आकृतियों से संबंधित कुछ खेलों का प्रबन्ध

भी बच्चों के लिए किया ताकि बच्चे अपनी समस्याओं के हल ढूंढ सके। ि"ाक्षक इसी प्रकरण से संबंधित कुछ सवालों को भी बच्चों के सामने समस्या के रूप में प्रस्तुत करता है तथा परिवे"ा से जोडते हुए संभावित उत्तरों पर चर्चा करता है तथा बीतचीत के जरिए बच्चो की समस्याओं का समाधान करता है। जब बच्चे उत्तर देते हैं तो ि"ाक्षक बच्चों को बताता है कि सीखने के दौरान मुश्किलों का सामना करना पडता है। कभी कभी ि"ाक्षक सामने आई चुनौतियों को दर्ज करने के लिए एक चैकलिस्ट बना सकता है ताकि समय समय पर चुनौतियों का समाधान कर सके। ि"ाक्षक समस्याओं के समाधान में दैनिक जीवन के अनुभवों का सहारा लेता है तथा सीखी गयी अवधारणाओं को दैनिक जीवन से संबंधित समस्याओं को समाधान करने की क्षमता से बच्चों का आकलन करता है।

औपचारिक बात–चीत

बच्चे आपसी बात–चीत द्वारा गणितीय अवधारणाओं की समझ बनाने के लिए आकलन कर सकते है जैसे– बच्चे जिस मैदान में खेलते हैं, उसको डेग (कदम) से नापकर उसकी परिमित निकाल सकते है। घेरा के लिए बाँस की गणना कर सकते हैं। घेरा पर आनेवाले खर्च का अनुमान, मैदान के किनारे–किनारे क्यारी बनाना, फूल लगाना इस कार्य में समय एवं खर्च का अनुमान इत्यादि।

शिक्षक द्वारा अवलोकन

गणित संबंधी गतिविधियों के दौरान बच्चो द्वारा सीखने का आकलन अवलोकन के माध्यम से किया जा सकता है। अवलोकन द्वारा बच्चो के बारे में जानकारी सामान्य या स्वाभाविक वातावरण में की जा सकती है। सिखाने के दौरान शिक्षक बच्चो का आकलन बच्चो द्वारा प्रश्नों के उत्तर देने के ढ़ग से कर सकता है। बच्चे की भागीदारी के स्तर का भी अवलोकन करके आकलन किया जा सकता है। अवलोकन द्वारा बच्चो के बहुत से पक्षों का आकलन किया जा सकता है। अवलोकन से बच्चो का आकलन व्यक्तिगत तथा सामूहिक दोनों रूपों में किया जा सकता है। ि"ाक्षक बच्चे के व्यवहार, रूचि, सीखी गई अवधारणा का दैनिक जीवन में अनुप्रयोग इत्यादि का अवलोकन करके बच्चे के बारे में एक दृष्टिकोण बना सकता है। ि"ाक्षक को बच्चे का अवलोकन विभिन्न परिस्थितियों, गतिविधियों और समयावधि में करना चाहिए। यदि बच्चे विभिन्न गतिविधियों में संलग्न होते हैं तब उनका अवलोकन करना शिक्षक के लिए सरल होता है।

आइए, इसे एक गतिविधि के माध्यम से समझते हैं–

सोनू तथा रानी कुछ वस्तुओं से खेल रहे है। वे वस्तुओं को एक दूसरे के ऊपर जमाकर देख रहे हैं। ि"ाक्षक उनकी इस गतिविधि का अवलोकन कर रहा है।

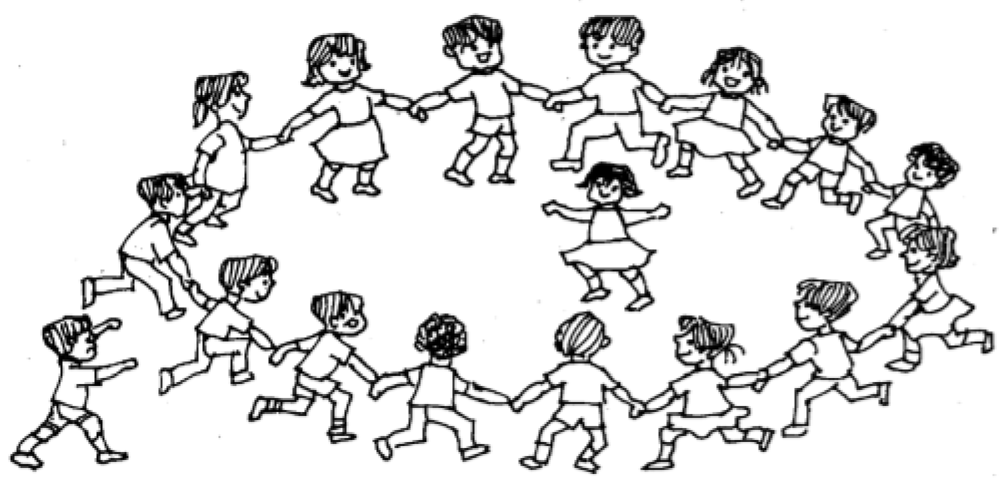
सोनू देखो जिन वस्तुओं के तल समतल है वे वस्तुए आसानी से एक दूसरे के ऊपर टिक जाती है परन्तु जिन वस्तुओं के तल समलत नही है, वे आसानी से एक दूसरे के ऊपर नहीं टिकती है। जब वे वस्तुओं को टिका रहे थे तो एक बेलनाकार वस्तु सोनू के हाथ से गिर गई तथा लुढककर दूर चली गई। अब दोंनों ने अन्य वस्तुओं को भी लुढकाना शुरू कर दिया।

रानी देखो जिन वस्तुओं का तल समतल है वे वस्तुए लुढकती नहीं, सरकती है। हां, सोनू कुछ वस्तुए तो लुढकती भी है तथा सरकती भी है।

ि"ाक्षक दोनों बच्चों की बातचीत को ध्यानपूर्वक से सुन रहा है तथा उनकी गतिविधियों को नोट भी कर रहा है। इनकी बातचीत को ि"ाक्षक गणित की भाषा में कक्षा में विस्तार से चर्चा करता है तथा संबंधित अवधारणाओं को स्पष्ट करता है।

आइए, सोचें –

सीता ने अपनी कक्षा के अन्य बच्चो से कहा सभी बच्चे इस प्रकार खड़े हो जाएँ कि वे एक–दूसरे से तथा मुझसे भी समान दूरी पर हों। अब पहले एक बच्चा खड़ा होता है। उसके बगल में कुछ दूरी पर दूसरा बच्चा। अब तीसरा बच्चा कहाँ खड़ा होगा? सीता से भी समान दूरी पाने के लिए बच्चों को निम्न प्रकार खड़ा होना पड़ेगा।



इस प्रकार सभी बच्चे गोलाकार खड़े हो जाते हैं और बीच में सीता हैं।

प्रश्न : बताइए कि बच्चे किस प्रकार की आकृति बनाते हैं। सीता का स्थान क्या है और राम से बच्चों की दूरियाँ क्या कहलाती है? इन प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए आपस में चर्चा करें।

शिक्षक अवलोकन करते हैं कि बच्चे आपस में बात–चीत के क्रम में बोलते हैं कि हमलोग किस आकृति में खड़े हुए हैं, वह आकृति चूड़ी की आकृति से मिलती है तथा सीता बीच में इस प्रकार खड़े हैं कि हम सभी से समान दूरी पर है। शिक्षक बच्चों के बात–चीत एवं उनके क्रिया विधि को अवलोकन एक बच्चा सीता से कुछ दूरी पर खड़ा हो जाता है। वह अपने दोनों हाथों को पैफला देता है। और दो साथियों को हाथ के पास बुला लेता है। अब ये बच्चे अन्य साथियों को इस प्रकार हाथ फैलाकर खड़े होने के लिए कहते हैं।

अब एक बच्चा कहता है कि हमारी दूरी सीता से भी बराबर होनी चाहिए। चलो एक रस्सी लेते हैं और राम को रस्सी का एक सिरा पकड़ाकर सभी बच्चे बारी–बारी से रस्सी के छोर पर आपस में समान दूरी बनाकर खड़े हो जाते हैं।

शिक्षक इस पूरी गतिविधि का अवलोकन करते हैं और बच्चों को बताते हैं कि वे जिस आकृति पर खड़े हैं वह वृत्ताकार आकृति है, सीता जहाँ स्वयं खड़ी हैं वह वृत्त का केन्द्र है तथा सीता से सभी बच्चों की दूरियाँ, रस्सी के समान लम्बाई के कारण समान है, इसे हम इस वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।

इस प्रकार इस गतिविधि में शिक्षक पूर्ण गतिविधि का अवलोकन कर रहे हैं। बच्चे भी आपस में अवलोकन कर रहें हैं और आपस में चर्चा कर रहे हैं। यह शिक्षक द्वारा अवलोकन एवं समवय समूह द्वारा अवलोकन की गतिविधि का एक उदाहरण प्रस्तुत करता है।

व्याख्यान में बच्चो को कुछ करने के लिए अधिक अवसर प्राप्त नहीं होते है। क्रियाकलापों के माध्यम से बच्चे अपने सबल और निर्बल पक्ष की पहचान कर सकते हैं तथा कमियों को सुधार सकते हैं। आप भी बच्चो को अधिक से अधिक समय क्रियाकलापों में संलग्न रखें और उनका सतत मूल्यांकन करते रहे।

प्रश्न :
40 + 40 + 40 + 40 + 40 को 5 से भाग देने पर भागफल क्या होगा?
दो बच्चों द्वारा दिए गए हल निम्न है –
पहला बच्चा : 40 + 40 + 40 + 40 + 40 = 200, अब 200 ÷ 5 = 40
दूसरा बच्चा : 40 + 40 + 40 + 40 + 40 = 40 × 5 , अब 40 × 5 ÷ 5 = 40
उपर्युक्त दोनों हलों पर ध्यान दें। अवलोकन करने पर पायेगें कि दोनों बच्चों द्रारा प्रस्तुत हल सही है। दोनों के उत्तर 40 हैं। अब शिक्षक अवलोकन का विश्लेषण करके निष्कर्ष निकालते हैं कि पहला बच्चा जोड़ना एवं भाग देना सही–सही जानता है, परन्तु इस क्रिया में वह बार–बार जोड़ की अवधारणा को गुणा के रूप में प्रयोग नहीं करता है जबकि दूसरा बच्चा ये दोनों क्रियाएँ सही–सही जानता है।

अललोकन के बाद निष्कर्ष रूप में कहा जा सकता है–

- बच्चे प्रश्न को अनेक तरीकों से हल कर सकते हैं
- बच्चे प्रश्न हल करने की प्रक्रिया में अनावश्यक रूप से गण्तिीय संक्रियाओं का उपयोग करते हैं।
- बच्चे अवधारणात्मक समझ नहीं होने के कारण गलत हल प्रस्तुत कर सकते हैं
- अवधारणाओं की सही समझ अनावश्यक संक्रियाओं से बचाती हैं।

आइए, कुछ ज्यामितीय आकृत्तियों का अवलोकन करें।
इनमें से कुछ आकृतियाँ ऐसी है जिन्हें एक रेखा पर मोड़ने से एक भाग दूसरे भाग को ढक लेता है, इनकी पहचान करें। ऐसी आकृतियाँ सममित कहलाती हैं। रेखा जिस पर आकृति को मोड़ा जाता है, सममिति अक्ष कहलाती है। इन्हें नामांकित करें।

प्रश्न : अपने परिवेश से पाँच सममित एवं पाँच असममित आकृतियों की पहचान करें, उनके चित्र बनावें, नामांकित करें। सममित आकृतियों में सममित अक्ष को नामांकित करें।

ज्यामिति से संबंधित अवधारणा के विकास हेतु अवलोकन के कुछ मुख्य बिन्दु निम्न हैं–

- क्या बच्चो को सममित आकृतियों की समझ है? हाँ/नहीं
- क्या बच्चो को असममित आकृतियों की समझ है? हाँ/नहीं
- क्या बच्चा दोनों प्रकार की आकृतियों में भेद कर सकता है? हाँ/नहीं
- क्या बच्चो को सममित की अवधारणा की समझ है? हाँ/नहीं

आप बच्चो के क्रियाकलापों में भाग लेने के स्तर का अवलोकन करें। बहुत से बच्चे गणित से डरते हैं और गणितीय गतिविधियों में भाग नहीं लेते हैं। उनकी कमजोरियों को पहचान कर आप उचित सुधारात्मक कदम उठाकर उन्हें गणितीय क्रियाकलापों में भाग लेने के लिए प्रेरित कर सकते हैं। अवलोकन के माध्यम से बच्चो के सबल और निर्बल पक्ष, उनके व्यक्तित्व के मुख्य पक्ष तथा क्रियाकलापों में बच्चो की भागीदारी के स्तर के बारे में जानकारी कर सकते हैं। गणित की कक्षा में बच्चो का अवलोकन करके बच्चो का गणित के प्रति रूझान, गणितीय भय और चिंता, बारम्बार गलतियां करना, वैकल्पिक उत्तरों का विकास करना और अन्य गणितीय कठिनाईयों के बारे में बहुमूल्य जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

परियोजना–कार्य

किसी शिक्षक समूह की गणित की समझ को आंकने के लिए परियोजना–कार्य एक अच्छे उपकरण के रूप में कार्य करता है। इसके लिए प्रशिक्षु समूह को निर्देश दें कि वे दो–दो जोड़े बनायें। समीप के किसी विद्यालय में जाकर वहाँ के किसी एक कक्षा के बच्चों की ऊँचाई की माप लें तथा साथ ही उनके वजन भी अंकित करें। निम्न सारणी में उनका अभिलेख तैयार करें और निष्कर्ष निकालें–

- कितने बच्चे सामान्य वजन अर्थात आदर्श वजन के अन्दर है।
- कितने बच्चे अधिक वजन अर्थात आदर्श वजन से अधिक है।
- कितने बच्चे कम वजन अर्थात आदर्श वजन से कम है।

क्र.स.	बच्चो का नाम	उँचाई	आदर्श वजन	सामान्य वजन	अधिक वजन	कम वजन
1.						
2.						
3.						

चिकित्सक से पूछ कर विभिन्न ऊँचाई के लिए आदर्श वजन ;फ्कमंस ॅमपहीजद्ध अंकित कर लें। अब चर्चा करें–

- हम यह कार्य क्यों करें? इस कार्य से क्या लाभ होगा?

- इसे और बेहतर तरीके से कैसे किया जा सकता है?
- क्या समूह विशेष शिक्षक–पुरूष / महिला–बच्चे–लड़के / लड़किया–अभिभावक–पुरूष / महिलाएं नमूना (Sample) कितना बड़ा लिया जाय?
- अभिलेख तैयार करना।

इसका उपयोग बच्चों / शिक्षकों / अभिभावकों की स्वास्थ्य–रक्षा के लिए कहाँ तक किया जा सकता है?

उपर्युक्त ढंग से किया गया कार्य परियोजना–कार्य कहलाता है। यह प्राकृतिक वातावरण अर्थात् जो है, जैसे है, में किया जाता है। यह वास्तविक जीवन में गणितीय अवधारणाओं की समझ में वृद्धि उत्पन्न करता है, साथ ही साथ यह गणितीय ज्ञान का दैनिक जीवन में अनुप्रयोग के अवसर प्रदान करता है।

परियोजना–कार्य में शामिल रहता है–

- स्वआकलन।
- समवयसमूह में चर्चा।
- आपसी बात–चीत द्वारा कक्षा के अंदर और बाहर गणितीय अवधारणाओं की समझ बनाने के लिए विभिन्न प्रकार के परियोजना कार्य किये जा सकते हैं। जैसे– कक्षा की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई मापकर बच्चों की बैठने की संख्या का आकलन करना, विद्यालय में उपलब्द्ध जमीन पर बागवानी से संबंधित परियोजना कार्य।

परियोजना–कार्य के आकलन हेतु निम्नलिखित मुख्य बिन्दु पर ध्यान देना आवश्यक होता है–

- क्या परियोजना का चुनाव मौलिक है?
- क्या परियोजना की विषय–वस्तु सार्थक है?
- क्या परियोजना वास्तविक जीवन से संबंधित है?
- क्या परियोजना बालक के परिवेश से जुड़ी है?
- क्या परियोजना तथ्यों पर आधारित है?
- क्या परियोजना का प्रस्तुतीकरण सौंदर्यपूर्ण है?
- क्या परियोजना अवधारणा को स्पष्ट करने में सहायक है?
- क्या परियोजना के पूर्ण करने हेतु कोई योजना बनाई गयी है?
- क्या परिणामों की व्याख्या सही रूप में की गई है?
- क्या परियोजना को पूरा करने में समय प्रबंधन का ख्याल रखा गया है
- क्या परियोजना सहभागिता आधारित है?

प्रश्न : मुख्यमंत्री भ्रमण परियोजना के लिए आपके विद्यालय को 10,000 रूपये मिले हैं। बच्चों के परिभृमण हेतु परियोजना तैयार करने का निर्देश दें। वे यह भी बतायेगें कि इसमें गणितीय अधिगम कहाँ–कहाँ होता है?

प्रश्न : प्राथमिक स्तर पर बच्चो को दिये जाने वाले पाँच परियोजनाओं की सूची बनावें प्रत्येक परियोजना में कौन–कौन सी गणितीय अवधारणा शामिल होती हैं उनकी सूची बनावें।

प्रश्न : सीखने–सीखाने के प्रक्रिया में मूल्यांकन के विभिन्न तरीके क्या हो सकते है? उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

7.7 प्राथमिक स्तर पर गणित के संदर्भ में सतत् व व्यापक मूल्यांकन

NCF 2005 परंपरागत आकलन पद्धति के बजाय नयी तथा सार्थक मूल्यांकन पद्धति अपनाने की सिफारिश करता है ताकि बच्चो के सीखने का समग्र रूप से मूल्यांकन किया जा सकें ओर बच्चे बिना डरे मूल्यांकन की प्रक्रिया में भाग ले सके। आर.टी.ई अधिनियम 2009 ने बच्चों के निःशुल्क और अनिवार्य शिक्षा के साथ–साथ बच्चों के सतत् और व्यापक मूल्यांकन की रूपरेखा भी प्रस्तुत की है जिसे कि हम पहले ही चर्चा कर चुके हैं कि प्रचलित रूढ़िगत मूल्यांकन पद्धति बच्चों के ज्ञान का समग्र रूप से आकलन करने में असफल रहता हैं प्रचलित पद्धति में वर्ष में एक या सत्र के अंत में ढाई या तीन घंटों के परीक्षा के माध्यम से बच्चों के वर्षभर में अर्जित ज्ञान का आकलन उचित रूप से करना संभव नहीं है अतः यदि बच्चे के अर्जित ज्ञान और अधिगम अनुभव का समग्र मूल्यांकन करना हो तो वह सतत और व्यापक मूल्यांकन की प्रक्रिया को अपना कर किया जा सकता है। बच्चों के सीखे हुए ज्ञान का मूल्यांकन कक्षा–कक्ष के विभिन्न क्रियाकलापों, विद्यालय के सह–शैक्षणिक गतिविधियों, खेल के माध्यम से, शिक्षण–प्रशिक्षण की प्रक्रिया में बच्चों के सक्रिय भागीदारी सुनिश्चित करके सतत एवं व्यापक रूप से किया जा सकता है। इन सभी परिस्थितियों में बच्चे के योग्यता, कौशल, व्यवहार, रुचि, अभिवृत्ति, गणितीय मनोवृत्ति व गणितीकरण की जाँच सतत् रूप से शिक्षक कर सकते हैं।

सतत एवं व्यापक मूल्यांकन प्रक्रिया सीखने सीखाने की प्रक्रिया का अभिन्न अंग है तथा यह दोनों प्रक्रियायें साथ–साथ चलती है। सतत एवं व्यापक मूल्यांकन का उद्देश्य है विद्यार्थियों को सीखने–सीखाने, ज्ञान की संरचना करने, अवधारणाओं तथा विधियों की समझ बनाने व अपने तरीके से उपयोग करके, अपने अधिगम–अनुभव को प्रभावी व स्थायी बनाना है। जाहिर है बच्चों को गणितीय समस्या समाधान व समस्या निर्माण के लिए विभिन्न परिस्थतियों में कई अवसर उपलब्ध कराने की आवश्यकता है। हमें विद्यार्थियों को परिचय उन तमाम विधियों से करवाना है जिसमें वे स्वयं के उत्तर निर्मित करने की सामर्थ्य विकसित कर सकें, तथा दूसरे बच्चों के उत्तर को देखकर उसका विश्लेषण करने और समझने का प्रयास भी कर सकें। उनका गलतियां करने के प्रति निडर होना ओर अपनी समझ को व्यक्त करने का आत्मविश्वास होना जरूरी है।

प्रश्न : गणित में सतत एवं व्यापक मूल्यांकन में अध्यापक की भूमिका की चर्चा उदाहरण सहित कीजिए।

प्रश्न : सतत एवं व्यापक मूल्यांकन के शिक्षण प्रशिक्षण प्रक्रिया का अभिन्न अंग क्यों माना गया है?

7.8 सारांश

इस इकाई से हमने जाना कि

शिक्षक को किसी भी गणितीय प्रकरण को पढ़ाने के पूर्व उसकी एक योजना बना लेनी चाहिए जिसमें क्रमबद्धता, समय तथा मूल्यांकन के पहलुओं का समावेश होना चाहिए। गणितीय प्रकरण को पढ़ाते समय प्रकरण को बच्चे के परिवेश से जोड़ा जाना चाहिए। इसके लिए परिवेश में ही उपलब्ध शिक्षण सहायक सामग्री का उपयोग कर सीखने सिखाने की प्रक्रिया को रूचिपूर्ण एवं आनंददायी बनाया जाना चाहिए। खेल एवं पहेलियों के माध्यम से गणित की अवधारणाओं को स्पष्ट किया जाना चाहिए क्योंकि बच्चे खेल के माध्यम से ज्यादा सीखते है तथा पहेलियों के द्वारा उनमें तर्कशक्ति का विकास होता है। आकलन के विभिन्न उपकरणों का उपयोग करके बच्चों का सतत् एवं व्यापक रूप से आकलन किया जाना चाहिए ताकि यह पता लगाया जा सके कि बच्चे ने अवधारणाओं को किस सीमा तक समझा है? पृष्ठपोषण के आधार पर ही बच्चो को नयी अवधारणा सिखाने की योजना बनानी चाहिए। बच्चो में गणितीय अवधारणाओं एवं कौशलों की समझ बनाने हेतु पाठ संबंधी शिक्षण अधिगम योजना ऐसी होनी चाहिए कि शिक्षण अधिगम समग्री एवं गणितीय खेलों के माध्यम से गणितीय अवधारणाओं को समझाया जा सकें और शिक्षक के कार्यों एवं प्रभावों का आकलन करके बच्चो को पृष्ठपोषण देना संभव हो सके।

7.9 स्व आकलन

1. प्राथमिक कक्षा में गणितीय अवधरणाओं के आकलन की आवश्यकता की व्याख्या कीजिए।
2. गणित अधिगम में पारंपरिक आकलन और विद्यार्थी केन्द्रित आकलन के बीच किन्ही तीन विभिन्नताओं को लिखिए।
3. प्रारम्भिक कक्षा में बच्चों के बीच गणित में स्व–आकलन की योग्यता को विकसित करने के दो तरीकों की व्याख्या कीजिए।
4. सामूहिक आकलन को अधिगम प्रक्रिया क्यों समझा जाता है?
5. कक्षा–कक्ष में अधिगम क्रियाकलाप में बच्चों की सहभागिता का आकलन करने के लिए आप कौन से पहलू को केन्द्रित करेंगे?
6. किसी भी गणितीय प्रकरण को पढाने के पहले उसकी योजना बनाना क्यों आवश्यक है?
7. गणितीय अवधारणाओं के स्पष्टीकरण में शिक्षण अधिगम सामग्री एवं खेलों की भूमिका पर चर्चा कीजिए।
8. अनुभवी अध्यापकों से चर्चा करके यह ज्ञात करें कि ज्स्ड गणितीय शिक्षण में किस प्रकार सहायक हैं।
9. विद्यालय प्रागंण को अधिगम सामग्री के रूप में प्रयोग के द्वारा किन–किन प्रत्ययों को विकसित किया जा सकता है। सूची बनाइए।
10. प्रशिक्षु अपने गाँव से प्रशिक्षण स्थल तक आने के लिए विभिन्न वाहनों का उपयोग करते है। इस पर उन्हें खर्च करना पड़ता है, समय देना पड़ता है, इसके आलोक में एक परियोजना की रूप–रेखा तैयार करने पर साथियों के साथ चर्चा करें।
11. प्रशिक्षु अपने गाँव से प्रशिक्षण स्थल तक आने के लिए विभिन्न वाहनों का उपयोग करते है। इस पर उन्हें खर्च करना पड़ता है, समय देना पड़ता है, इस आलोक बनायी गयी परियोजना संबंधी आंकड़ो को कम्प्यूटर पर चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित करें।

1.11 संदर्भ सूची

- बिहार पाठयचर्या की रूपरेखा (बी.सी.एफ.) 2008।
- बिहार राज्य की गणित की पाठय पुस्तकें कक्षा 1 से कक्षा 5 तक।
- प्राथमिक स्तर पर गणित की पाठ्य–पुस्तक खुशी–खुशी शृंखला, कक्षा 1–5, एकलव्य का प्रका"ान, भोपाल।
- राष्ट्रीय पाठयचर्या रूपरेखा (एन.सी.एफ.) 2005
- गणित शिक्षण का आधार पत्र, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली।
- Arora, S.K. How to Teach Mathematics. New Delhi: Sterling Publishers Pvt. Ltd., 2000.
- Lampert, Teaching problems and the Problems of Teaching, Yale University Press, 2001.
- Liebeck, Pamela: How Children Learn Mathematics, Aguide or Parents and Teachers.
- Liping Ma: Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States, Anniversary Edition
- Mangal, S.K.: Teaching of Mathematics. Ludhiana: Tandon Publications, 2003.
- Rampal, A., Ramanujam, R. & Saraswati, L. S. (1998). Numeracy counts! Mussoorie: National Literacy Resource Centre.
- SCERT, New Delhi: Teachers Manual and Other study Material related to Mathematics, Year 2006 -13
- Source Book for assessment in mathematics (Class I-V), NCERT, New Delhi

इस पठन सामग्री के विषय में अपने फीडबैक तथा अन्य नोट्स लिखने के लिए